

중학교 3학년

이차방정식 · 이차함수

핵심 개념 + 기출 유형 20선

단원	이차방정식 (1~10번) · 이차함수 (11~20번)
수준	기초 ~ 기본 (내신 기출 스타일)
형식	주관식 서술형
구성	개념 정리 → 예제 풀이 → 연습 문제 → 해설 답안

※ 문제를 풀고 난 후, 맨 마지막 장의 해설 및 정답을 확인하세요.

PART 1 이차방정식

개념 01 이차방정식의 뜻과 표준형

- $(ax^2 + bx + c = 0)$ 꼴 ($a \neq 0$)을 이차방정식이라 한다.
- 모든 항을 좌변으로 이항하여 정리했을 때 위 형태가 되어야 한다.
- x 의 최고차수가 2여야 하며, 이차항의 계수 $a \neq 0$ 이어야 한다.
- ★ 암기: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) ← 표준형

예제 01

다음 중 이차방정식인 것은?

(가) $x^2 + 3x + 2 = 0$ (나) $x^3 - x = 0$ (다) $2x^2 = 2x^2$

풀이: (가)는 최고차항이 x^2 이고 계수 $1 \neq 0 \rightarrow$ 이차방정식 ○

(나)는 삼차방정식 (다)는 이항하면 $0=0$, 이차항 사라짐

정답: (가)

개념 02 인수분해를 이용한 풀이

- $AB = 0$ 이면 $A = 0$ 또는 $B = 0$
 - 좌변을 인수분해하면 해를 바로 구할 수 있다.
 - $(x-a)(x-b) = 0 \rightarrow x = a$ 또는 $x = b$
- 자주 쓰는 공식: $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

예제 02

$x^2 - 5x + 6 = 0$ 을 풀어라.

풀이: $(x-2)(x-3) = 0$ ($\because -2 \times -3 = 6, -2 + (-3) = -5$)

$x-2=0$ 또는 $x-3=0$

정답: $x = 2$ 또는 $x = 3$

개념 03 완전제곱식 / 제곱근을 이용한 풀이

- $(x+a)^2 = k$ 꼴로 변형 후 제곱근 이용
 - $k > 0$ 이면 $x = -a \pm \sqrt{k}$ (두 근)
 - $k = 0$ 이면 $x = -a$ (중근)
 - $k < 0$ 이면 실수 범위에서 해 없음
- ★ 완전제곱식 만들기: $x^2 + bx \rightarrow (x + b/2)^2 - (b/2)^2$

예제 03

$(x-3)^2 = 5$ 를 풀어라.

풀이: $x - 3 = \pm\sqrt{5}$

정답: $x = 3 + \sqrt{5}$ 또는 $x = 3 - \sqrt{5}$

개념 04 근의 공식

● $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)의 해:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

● 판별식 $D = b^2 - 4ac$

$D > 0$: 서로 다른 두 실수 근

$D = 0$: 중근 (같은 두 근)

$D < 0$: 실수 근 없음

예제 04

$2x^2 - 3x - 2 = 0$ 을 근의 공식으로 풀어라.

풀이: $a=2, b=-3, c=-2$

$$D = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

정답: $x = 2$ 또는 $x = -1/2$

▶ 이차방정식 연습문제 (1 ~ 10번)

문제 1. [이차방정식의 뜻]

x에 대한 방정식 $k \cdot x^2 + 3x - 1 = 0$ 이 이차방정식이 되려면 상수 k의 조건을 구하시오.

풀이: _____

문제 2. [이차방정식의 해 확인]

$x = -2$ 가 이차방정식 $x^2 + ax - 6 = 0$ 의 한 해일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

풀이: _____

문제 3. [인수분해 풀이]

이차방정식 $x^2 + 2x - 15 = 0$ 을 풀어 두 근의 합을 구하시오.

풀이: _____

문제 4. [인수분해 풀이 - 변형]

이차방정식 $2x^2 - 7x + 3 = 0$ 을 풀어 두 근의 곱을 구하시오.

풀이: _____

문제 5. [완전제곱식]

이차방정식 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 을 완전제곱식을 이용하여 풀어라.

(단, 풀이 과정을 반드시 쓸 것)

풀이: _____

문제 6. [중근 조건]

이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$ 이 중근을 가지려면 상수 k의 값을 구하시오.

풀이: _____

문제 7. [근의 공식]

근의 공식을 이용하여 이차방정식 $3x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 해를 구하시오.

(단, 근호 안의 수를 최대한 간단히 나타낼 것)

풀이: _____

문제 8. [판별식]

이차방정식 $x^2 + mx + m + 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실수 근을 가지려면 상수 m 의 범위를 구하시오.

풀이: _____

문제 9. [근과 계수의 관계]

이차방정식 $x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하시오.

(힌트: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$)

풀이: _____

문제 10. [이차방정식 활용 - 수 문제]

연속하는 두 자연수의 곱이 72일 때, 두 자연수를 각각 구하시오.

(방정식을 세워 풀 것)

풀이: _____

PART 2 이차함수

개념 05 이차함수의 뜻과 기본형

- $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 형태가 기본형
- $a > 0$: 아래로 볼록 (U), $a < 0$: 위로 볼록 (∩)
- $|a|$ 가 클수록 폭이 좁아지고, $|a|$ 가 작을수록 폭이 넓어진다.
- ★ 꼭짓점 (0, 0), 축의 방정식 $x = 0$

예제 05

$y = -3x^2$ 과 $y = 2x^2$ 의 그래프를 비교하여라.

풀이: 둘 다 꼭짓점이 원점이지만,

$-3x^2$ 는 위로 볼록(∩), 더 좁은 포물선

$2x^2$ 는 아래로 볼록(U), 상대적으로 넓은 포물선

정답: $y = -3x^2$ 는 위로 볼록, $y = 2x^2$ 는 아래로 볼록

개념 06 $y = a(x-p)^2 + q$ (표준형)

- 꼭짓점: (p, q)
- 축의 방정식: $x = p$
- $y = ax^2$ 그래프를 x 축 방향 p, y 축 방향 q 만큼 평행이동한 것
- ★ 평행이동 시 모양(a 값)은 변하지 않는다.

예제 06

$y = 2(x-3)^2 - 1$ 의 꼭짓점과 축의 방정식을 구하여라.

풀이: $p=3, q=-1$ 대입

정답: 꼭짓점 (3, -1), 축의 방정식 $x = 3$

개념 07 $y = ax^2 + bx + c$ (일반형) → 표준형 변환

- 완전제곱식으로 변형: $y = a(x-p)^2 + q$
- $p = -b/(2a), q = c - b^2 / (4a)$
- 꼭짓점 x 좌표 = $-b/(2a)$ (암기 필수!)
- ★ 변환 순서: ① a로 묶기 → ② 완전제곱식 → ③ 상수 정리

예제 07

$y = x^2 - 4x + 1$ 을 표준형으로 나타내어라.

풀이: $y = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 1$

$= (x-2)^2 - 3$

정답: $y = (x-2)^2 - 3$ 꼭짓점 (2, -3)

개념 08 이차함수의 그래프와 x절편 (이차방정식과의 관계)

- $y = ax^2 + bx + c$ 에서 x절편 $\rightarrow y=0$ 으로 놓고 $ax^2 + bx + c = 0$ 을 풀면 된다.
- $D > 0$: x절편 2개 (그래프가 x축과 두 점에서 만남)
- $D = 0$: x절편 1개 (x축에 접함)
- $D < 0$: x절편 없음 (x축과 만나지 않음)

예제 08

$y = x^2 - 2x - 3$ 의 x절편을 구하여라.

풀이: $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

정답: x절편은 -1, 3 (두 점 (-1,0), (3,0))

▶ 이차함수 연습문제 (11 ~ 20번)

문제 11. [이차함수의 뜻]

다음 중 y 가 x 의 이차함수인 것을 모두 고르고, 그 이유를 쓰시오.

(가) $y = x^2 - 3x$ (나) $y = (x+1)(x-1) - x^2$ (다) $y = 3/x^2$

풀이: _____

문제 12. [기본형 그래프]

$y = -2x^2$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르시오.

(가) 아래로 볼록이다. (나) 꼭짓점은 원점이다.

(다) $y = 2x^2$ 보다 폭이 좁다. (라) $x > 0$ 일 때 x 가 증가하면 y 도 증가한다.

풀이: _____

문제 13. [평행이동]

$y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2만큼, y 축 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식을 구하시오.

풀이: _____

문제 14. [꼭짓점과 식 구하기]

꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이고, 점 $(1, -4)$ 를 지나는 이차함수의 식을 구하시오.

풀이: _____

문제 15. [일반형 → 표준형]

$y = 2x^2 - 8x + 3$ 을 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 나타내고, 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

풀이: _____

문제 16. [축의 방정식 활용]

$y = -x^2 + 6x - 5$ 의 꼭짓점의 좌표를 구하고, 이 포물선이 y 축과 만나는 점의 좌표를 구하시오.

풀이: _____

문제 17. [x절편과 판별식]

$y = x^2 + kx + 4$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, 양수 k 의 값과 그때의 접점의 좌표를 구하시오.

풀이: _____

문제 18. [최댓값 · 최솟값]

$y = -2(x-1)^2 + 8$ 에서 최댓값과 그때의 x 값을 구하시오.

또한, 이 이차함수의 x 절편의 합을 구하시오.

풀이: _____

문제 19. [이차함수 활용 - 넓이 문제]

가로와 세로의 길이의 합이 10 cm인 직사각형의 넓이를 최대로 하려면 가로의 길이를 몇 cm로 해야 하는지 구하시오.

(이차함수를 이용할 것)

풀이: _____

문제 20. [이차방정식과 이차함수 연계]

$y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 이 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 구하고, 두 점 사이의 거리를 구하시오.

풀이: _____

정답 및 해설

문제 1번

이차방정식이 되려면 x^2 의 계수가 0이 아니어야 한다.

$$\therefore k \neq 0$$

▶ 정답: $k \neq 0$

문제 2번

$$x = -2 \text{를 대입: } (-2)^2 + a(-2) - 6 = 0$$

$$4 - 2a - 6 = 0 \rightarrow -2a = 2 \rightarrow a = -1$$

▶ 정답: $a = -1$

문제 3번

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow (x+5)(x-3) = 0$$

$$x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

두 근의 합: $(-5) + 3 = -2$ (또는 근과 계수의 관계: $-b/a = -2$)

▶ 정답: 두 근의 합 = -2

문제 4번

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \rightarrow (2x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1/2 \text{ 또는 } x = 3$$

두 근의 곱: $(1/2) \times 3 = 3/2$ (또는 $c/a = 3/2$)

▶ 정답: 두 근의 곱 = $3/2$

문제 5번

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + 7 = 0$$

$$(x-3)^2 - 2 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 2$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{2} \rightarrow x = 3 \pm \sqrt{2}$$

▶ 정답: $x = 3 \pm \sqrt{2}$

문제 6번

중근 조건: 판별식 $D = 0$

$$D = (-4)^2 - 4(1)(k) = 16 - 4k = 0$$

$$\therefore k = 4$$

▶ 정답: $k = 4$

문제 7번

$$a=3, b=4, c=-1$$

$$D = 16 - 4(3)(-1) = 16 + 12 = 28$$

$$x = (-4 \pm \sqrt{28}) / 6 = (-4 \pm 2\sqrt{7}) / 6 = (-2 \pm \sqrt{7}) / 3$$

▶ 정답: $x = (-2 \pm \sqrt{7}) / 3$

문제 8번

$$D = m^2 - 4(m+3) > 0$$

$$m^2 - 4m - 12 > 0$$

$$(m-6)(m+2) > 0 \rightarrow m < -2 \text{ 또는 } m > 6$$

$$\ast \text{ 수정: } D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+3) = m^2 - 4m - 12 > 0$$

$$(m+2)(m-6) > 0 \rightarrow m < -2 \text{ 또는 } m > 6$$

▶ 정답: $m < -1 \text{ 또는 } m > 3$

문제 9번

근과 계수의 관계: $\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 3$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 25 - 6 = 19$$

▶ 정답: $\alpha^2 + \beta^2 = 19$

문제 10번

두 자연수를 $n, n+1$ 로 놓으면

$$n(n+1) = 72 \rightarrow n^2 + n - 72 = 0$$

$$(n-8)(n+9) = 0 \rightarrow n = 8 (\because n > 0)$$

\therefore 두 자연수는 8과 9

▶ 정답: 8과 9

문제 11번

(가) $y = x^2 - 3x$: 이차함수 ○

(나) $y = x^2 - 1 - x^2 = -1$: 상수함수

(다) $y = 3/x^2$: 분수함수

▶ 정답: (가)

문제 12번

(가) $a = -2 < 0$ 이므로 위로 볼록

(나) 꼭짓점 $(0, 0)$ ○

(다) $|-2| > |2|$ 이므로 $y = 2x^2$ 보다 폭이 좁다 ○

(라) $a < 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 x 증가 시 y 감소

▶ 정답: (나), (다)

문제 13번

$y = 3x^2$ 에서 x 대신 $(x - (-2)) = (x + 2)$ 대입하고 y 에 5 더함

$$\therefore y = 3(x+2)^2 + 5$$

▶ 정답: $y = 3(x+2)^2 + 5$

문제 14번

꼭짓점 $(-1, 4) \rightarrow y = a(x+1)^2 + 4$

점 $(1, -4)$ 대입: $-4 = a(1+1)^2 + 4 = 4a + 4$

$$-8 = 4a \rightarrow a = -2$$

$$\therefore y = -2(x+1)^2 + 4$$

▶ 정답: $y = -2(x+1)^2 + 4$

문제 15번

$$y = 2x^2 - 8x + 3$$

$$= 2(x^2 - 4x) + 3$$

$$= 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3$$

$$= 2(x-2)^2 - 8 + 3$$

$$= 2(x-2)^2 - 5$$

꼭짓점: $(2, -5)$

▶ 정답: 꼭짓점 $(2, -5)$

문제 16번

$$y = -(x^2 - 6x) - 5 = -(x^2 - 6x + 9 - 9) - 5$$

$$= -(x-3)^2 + 9 - 5 = -(x-3)^2 + 4$$

꼭짓점: (3, 4)

y절편: $x=0$ 대입 $\rightarrow y = 0 - 0 - 5 = -5 \rightarrow$ 점 (0, -5)

▶ 정답: 꼭짓점 (3, 4), y절편 (0, -5)

문제 17번

x축에 접하면 판별식 $D = 0$

$$k^2 - 4(1)(4) = 0 \rightarrow k^2 = 16 \rightarrow k = \pm 4$$

양수이므로 $k = 4$

접점: $x = -k/2 = -2 \rightarrow$ 점 (-2, 0)

▶ 정답: $k = 4$, 접점 (-2, 0)

문제 18번

$a = -2 < 0$ 이므로 위로 볼록, 꼭짓점에서 최댓값

최댓값: $x=1$ 일 때 $y = 8$

x절편: $-2(x-1)^2 + 8 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 4 \rightarrow x=3$ 또는 $x=-1$

x절편의 합: $3 + (-1) = 2$

▶ 정답: 최댓값 8 ($x=1$), x절편의 합 = 2

문제 19번

가로를 x cm, 세로를 $(10-x)$ cm로 놓으면

$$\text{넓이 } y = x(10-x) = -x^2 + 10x$$

$$= -(x-5)^2 + 25$$

$x = 5$ 일 때 최댓값 25 cm^2

\therefore 가로 = 5 cm

▶ 정답: 가로 = 5 cm

문제 20번

$$x^2 - 2x - 3 = 1 \rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \text{ 또는 } x = -1$$

두 점: (3,1), (-1,1)

$$\text{거리: } 3 - (-1) = 4$$

▶ 정답: $x = -1$ 또는 $x = 3$, 두 점 사이의 거리 = 4