정답과 해설

I 수와 식의 계산

1 유리수와 순환소수

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.9~12

1-1 -3	**1-2** ㄴ, ㄷ	**1-3** 451	**2-1** 7개	**2-2** 16개
2-3 23개	**3-1** 99	**3-2** 29, 46	**3-3** 7개	
4-1 $0.\dot{6}\dot{3}$	**4-2** 14	**4-3** 50개	**4-4** ㄴ	**4-5** 152
5-1 ③, ⑤	**5-2** ③, ④	**6-1** ①	**6-2** $A=315$, $n=28$	
6-3 7	**6-4** $0.\dot{3}$	**7-1** 27	**7-2** 6	**7-3** ②, ③
8-1 ㄴ, ㄷ, ㅁ		**8-2** ㄱ, ㄴ		

1-1 $\frac{5}{41}=0.\dot{1}219\dot{5}$에서 순환마디의 숫자의 개수는 5개이다.
$37=5\times7+2$이므로 소수점 아래 37번째 자리의 숫자는 소수점 아래 2번째 자리의 숫자와 같은 2이다.
$53=5\times10+3$이므로 소수점 아래 53번째 자리의 숫자는 소수점 아래 3번째 자리의 숫자와 같은 1이다.
따라서 $x=2$, $y=1$이므로
$3a+10=4+a$, $2a=-6$
$\therefore a=-3$

1-2 ㄱ. $1.\dot{5}1\dot{3}$에서 순환마디의 숫자의 개수는 3개이다.
이때 $25=3\times8+1$이므로 소수점 아래 25번째 자리의 숫자는 소수점 아래 첫째 자리의 숫자와 같은 5이다.
ㄴ. $\frac{5}{13}=0.\dot{3}8461\dot{5}$에서 순환마디의 숫자의 개수는 6개이다.
이때 $25=6\times4+1$이므로 소수점 아래 25번째 자리의 숫자는 소수점 아래 첫째 자리의 숫자와 같은 3이다.
ㄷ. $\frac{7}{110}=0.0\dot{6}\dot{3}$에서 소수점 아래 둘째 자리부터 순환마디가 시작하고 순환마디의 숫자의 개수는 2개이다.
이때 $25-1=2\times12$이므로 소수점 아래 25번째 자리의 숫자는 순환마디의 맨 끝의 숫자와 같은 3이다.
ㄹ. $\frac{17}{45}=0.3\dot{7}$이므로 소수점 아래 25번째 자리의 숫자는 7이다.
따라서 소수점 아래 25번째 자리의 숫자가 3인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1-3 $\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$에서 순환마디의 숫자의 개수는 6개이다.
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$은 소수점 아래 첫째 자리부터 100번째 자리까지의 숫자들의 합이다.
이때 $100=6\times16+4$이므로
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{100}$
$=(4+2+8+5+7+1)\times16+(4+2+8+5)$
$=451$

2-1 분모 a의 소인수가 2나 5뿐이면 유한소수가 된다.
즉, a가 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20이면 $\frac{1}{a}$을 유한소수로 나타낼 수 있으므로 a의 개수는 7개이다.

2-2 유한소수로 나타낼 수 없는 분수의 개수는 순환소수로 나타낼 수 있는 분수의 개수와 같다.
기약분수의 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있으면 순환소수가 되므로 순환소수가 되는 분수는 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$
이때 $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$, $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$이므로 구하는 분수의 개수는 16개이다.

2-3 기약분수의 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있으면 순환소수가 된다.
(ⅰ) $b=3$일 때, a는 3, 6, 9를 제외한 수 7개
(ⅱ) $b=6$일 때, a는 3, 6, 9를 제외한 수 7개
(ⅲ) $b=7$일 때, 분자가 $7a$이므로 가능한 a는 없다.
(ⅳ) $b=9$일 때, a는 9를 제외한 수 9개
따라서 (ⅰ)~(ⅳ)에 의해 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는
$7+7+0+9=23$(개)

3-1 $\frac{90}{108}\times a=\frac{5}{6}\times a=\frac{5}{2\times3}\times a$가 유한소수가 되려면 a는 3의 배수이어야 한다.
$\frac{9}{110}\times a=\frac{9}{2\times5\times11}\times a$가 유한소수가 되려면 a는 11의 배수이어야 한다.
따라서 a는 3과 11의 공배수인 33의 배수이므로 두 자리의 자연수 중 가장 큰 수는 99이다.

3-2 $\frac{x}{56}$를 기약분수로 나타내면 $\frac{3}{y}$이므로
$\frac{x}{56}=\frac{3\times(\text{공통인 수})}{y\times(\text{공통인 수})}$에서 x는 3의 배수이다.
$\frac{x}{56}=\frac{x}{2^3\times7}$가 유한소수가 되려면 x는 7의 배수이어야 한다. 즉, x는 3과 7의 공배수인 21의 배수이고 x는 50 이하인 자연수이므로 x의 값은 21 또는 42이다.
(ⅰ) $x=21$일 때,
$\frac{x}{56}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8}$이므로 $y=8$ $\quad\therefore x+y=29$
(ⅱ) $x=42$일 때,
$\frac{x}{56}=\frac{42}{56}=\frac{3}{4}$이므로 $y=4$ $\quad\therefore x+y=46$
따라서 $x+y$의 값은 29, 46이다.

3-3 $\frac{63}{200N}=\frac{63}{2^3\times5^2\times N}$ 이 유한소수가 되려면 N은 소인수가 2나 5뿐인 수 또는 63의 약수 또는 이들의 곱으로 이루어진 수이어야 한다.
이때 N이 2를 소인수로 가지면 짝수가 되므로 N은 2를 소인수로 가질 수 없다.

×	1	3	7	9	21	63
1	1	3	7	9	21	63
5	5	15	35	45	105	315
5^2	25	75	175	225	525	1575

따라서 위의 표에 의하여 두 자리의 홀수 N은 15, 21, 25, 35, 45, 63, 75의 7개이다.

4-1 $0.58\dot{3}=\frac{583-58}{900}=\frac{525}{900}=\frac{7}{12}$ 에서 분자는 옳게 보았으므로 처음 기약분수의 분자는 7이다.

$0.\dot{8}\dot{1}=\frac{81}{99}=\frac{9}{11}$ 에서 분모는 옳게 보았으므로 처음 기약분수의 분모는 11이다.

따라서 처음의 분수는 $\frac{7}{11}$ 이고 이를 순환소수로 나타내면 $0.\dot{6}\dot{3}$이다.

4-2 $1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=1-\cfrac{1}{1+\cfrac{x}{x+1}}$

$=1-\frac{x+1}{2x+1}=\frac{x}{2x+1}$

$0.\dot{1}3\dot{5}=\frac{135}{999}=\frac{5}{37}$

$\frac{x}{2x+1}=\frac{5}{37}$ 이므로 $37x=10x+5$, $27x=5$

$\therefore\ x=\frac{5}{27}=0.\dot{1}8\dot{5}$

따라서 $a=1$, $b=8$, $c=5$이므로 $a+b+c=14$

4-3 소수점 아래 첫째 자리부터 순환마디가 시작되는 순환소수를 분수로 나타내면 분모는 9, 99, 999, …의 꼴이다.

$\frac{x}{396}=\frac{x}{9\times44}=\frac{x}{99\times4}$ 에서 x는 44의 배수이거나 4의 배수이어야 하므로 x는 4의 배수이다.
따라서 200 이하의 자연수 x의 개수는 50개이다.

4-4 495와 서로소인 자연수 n에 대하여 $A=\frac{n}{495}=\frac{2n}{990}$ 이라 하면 A의 소수 부분은 $0.a\dot{b}\dot{c}$ (a, b, c는 0 또는 한자리의 자연수)의 꼴이다.
ㄱ. 순환마디의 숫자의 개수는 2개이다.
ㄴ. 순환하지 않는 소수 부분의 숫자의 개수는 1개이므로 순환마디는 소수점 아래 2번째 자리부터 시작된다.
ㄷ. A를 분수로 나타내는 데 필요한 식은 $1000A-10A$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

4-5 $2+369\times\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{10^9}+\cdots\right)$

$=2+369\times\frac{1}{10^3}+369\times\frac{1}{10^6}+369\times\frac{1}{10^9}+\cdots$

$=2+0.369+0.000369+0.000000369+\cdots$

$=2.369369369\cdots=2.\dot{3}6\dot{9}$

따라서 $2.\dot{3}6\dot{9}=\frac{2369-2}{999}=\frac{2367}{999}=\frac{263}{111}$ 이므로

$m=111$, $n=263$　　$\therefore\ n-m=152$

5-1 ① $0.\dot{1}\dot{2}=\frac{12}{99}$, $0.12=\frac{12}{100}$ 이므로 $\frac{12}{99}>\frac{12}{100}$

② $0.6=\frac{6}{9}=\frac{22}{33}$ 이므로 $\frac{20}{33}<\frac{22}{33}$

③ $0.\dot{3}=\frac{3}{9}$ 이므로 $\frac{3}{9}>\frac{3}{10}$

④ $0.\dot{0}2\dot{5}=\frac{25}{999}$, $0.0\dot{2}\dot{5}=\frac{25}{990}$ 이므로 $\frac{25}{999}<\frac{25}{990}$

[다른 풀이]
$0.\dot{0}2\dot{5}=0.025025025\cdots$, $0.0\dot{2}\dot{5}=0.0252525\cdots$이므로
$0.\dot{0}2\dot{5}<0.0\dot{2}\dot{5}$

⑤ $2.\dot{6}=\frac{24}{9}$ 이므로 $\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$

따라서 대소 관계가 옳은 것은 ③, ⑤이다.

5-2 $0.4\dot{1}<x<0.\dot{8}$이라 하면
$\frac{37}{90}<x<\frac{8}{9}$
따라서 조건을 만족하는 것은 ③, ④이다.

6-1 $0.\dot{2}\dot{3}+A=\frac{7}{11}$, $\frac{23}{99}+A=\frac{63}{99}$

$\therefore\ A=\frac{40}{99}=0.\dot{4}\dot{0}$

6-2 $2.4\dot{8}=\frac{248-24}{90}=\frac{224}{90}=\frac{112}{45}=\frac{2^4\times7}{3^2\times5}$ 이고,

$\frac{2^4\times7}{3^2\times5}\times A=n^2$이므로 가장 작은 자연수 A는
$A=3^2\times5\times7=315$이다.
$A=315$일 때,
$2.4\dot{8}\times A=\frac{2^4\times7}{3^2\times5}\times(3^2\times5\times7)=2^4\times7^2=(2^2\times7)^2=28^2$
이므로 $n=28$

6-3 $1.\dot{3}=\frac{13-1}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ 이고

$3.0\dot{2}=\frac{302-30}{90}=\frac{272}{90}=\frac{136}{45}$ 이므로 주어진 식은

$\left(\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{a}{b}=\frac{136}{45}$

즉, $\frac{a}{b}=\frac{136}{45}\times\frac{9}{16}=\frac{17}{10}$ 이므로 $a=17$, $b=10$

$\therefore\ a-b=17-10=7$

6-4 $0.\dot{a}\dot{b}-0.\dot{b}\dot{a}=\frac{10a+b}{99}-\frac{10b+a}{99}=\frac{9(a-b)}{99}=\frac{a-b}{11}$

$0.\dot{0}\dot{9}=\frac{9}{99}=\frac{1}{11}$

즉, $0.\dot{a}\dot{b}-0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{0}\dot{9}$에서

$\frac{a-b}{11}=\frac{1}{11}$이므로 $a-b=1$ $\cdots$㉠

이때 $a-2b=0$에서 $a=2b$를 ㉠에 대입하면

$2b-b=1$ $\quad\therefore b=1,\ a=2$

$\therefore 0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{2}\dot{1}+0.\dot{1}\dot{2}$

$=\frac{21}{99}+\frac{12}{99}=\frac{33}{99}$

$=\frac{3}{9}=0.\dot{3}$

7-1 $0.\dot{2}x+\frac{1}{3}=1.\dot{6}$에서 $\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}=\frac{15}{9}$

$2x+3=15,\ 2x=12$ $\quad\therefore x=6$

$0.0\dot{4}y-\frac{4}{15}=0.\dot{6}$에서 $\frac{4}{90}y-\frac{4}{15}=\frac{6}{9}$

$4y-24=60,\ 4y=84$ $\quad\therefore y=21$

$\therefore x+y=6+21=27$

7-2 $0.4\dot{x}=\frac{(40+x)-4}{90}=\frac{36+x}{90}$이므로

$0.4\dot{x}=\frac{x+1}{15}$에서 $\frac{36+x}{90}=\frac{x+1}{15}$

$36+x=6(x+1),\ 5x=30$ $\quad\therefore x=6$

7-3 $\frac{1}{6}<0.\dot{a}-0.0\dot{a}<\frac{1}{3}$에서

$\frac{1}{6}<\frac{a}{9}-\frac{a}{90}<\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}<\frac{9a}{90}<\frac{1}{3}$

$\frac{15}{90}<\frac{9a}{90}<\frac{30}{90},\ 15<9a<30$

$\therefore \frac{5}{3}<a<\frac{10}{3}$

따라서 한 자리의 자연수 a는 2, 3이다.

8-1 ㄴ. 순환하지 않는 무한소수는 유리수가 아니다.
ㄷ. 순환소수는 모두 유리수이다.
ㅁ. 기약분수 중 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있으면 순환소수, 즉 무한소수가 된다.
따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

8-2 $a=\frac{3}{10},\ b=\frac{1}{3}$이라 하자.

ㄷ. $a\times b=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}=0.1$

ㄹ. $a\div b=\frac{3}{10}\div\frac{1}{3}=\frac{3}{10}\times 3=\frac{9}{10}=0.9$

따라서 항상 유한소수로 나타낼 수 없는 분수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.13~15

01 1　**02** ㄱ, ㄷ　**03** ④　**04** -129　**05** ③
06 113　**07** 16, 32　**08** $\frac{91}{99}$
09 $a=1,\ b=2,\ c=4,\ d=9$　**10** 97, 99, 101
11 3자리　**12** 1　**13** (4, 5), (4, 6), (4, 7)
14 $0.00\dot{2}$　**15** $3.\dot{7}$　**16** ⑤　**17** $\frac{10}{9}$배　**18** 4

01 (가)에서 $\frac{11}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}}=\frac{11}{1-\frac{a}{a-1}}=11-11a$

$11-11a=6$이므로 $a=\frac{5}{11}=0.\dot{4}\dot{5}$

즉, 순환소수 $0.\dot{4}\dot{5}$의 소수점 아래 1000번째 자리의 숫자는 5이다.

$\therefore x=5$

(나)에서 $\frac{6}{11}=0.\dot{5}\dot{4}$이므로 순환소수 $0.\dot{5}\dot{4}$의 소수점 아래 499번째 자리의 숫자는 5이다.

$\therefore y=5$

따라서 $\frac{y}{x}$의 값은 $\frac{5}{5}=1$이다.

02 $\frac{4}{13}=0.\dot{3}0769\dot{2}$에서 순환마디의 숫자의 개수는 6개이다.

ㄱ. $20=6\times3+2$이므로
$f(20)=f(2)=0$
ㄴ. 순환마디에서 두 번째 숫자가 0이므로
$f(2)=f(8)=f(14)=\cdots$
$=f(6k+2)=0$ (단, k는 음이 아닌 정수)
ㄷ. 순환마디의 숫자의 개수가 6개이므로
$f(n)=f(n+6)$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03 기약분수의 분모를 적당히 변형한다.

① $\frac{x}{3}=\frac{3x}{9}$에서 $a.\dot{b}$의 꼴이므로 순환마디의 숫자의 개수는 1개이다.
② $\frac{x}{6}=\frac{15x}{90}$에서 $a.b\dot{c}$의 꼴이므로 순환마디의 숫자의 개수는 1개이다.
③ $\frac{x}{9}$에서 $a.\dot{b}$의 꼴이므로 순환마디의 숫자의 개수는 1개이다.
④ $\frac{x}{11}=\frac{9x}{99}$에서 $a.\dot{b}\dot{c}$의 꼴이므로 순환마디의 숫자의 개수는 2개이다.
⑤ $\frac{x}{15}=\frac{6x}{90}$에서 $a.b\dot{c}$의 꼴이므로 순환마디의 숫자의 개수는 1개이다.

따라서 순환마디의 숫자의 개수가 가장 많은 것은 ④이다.

04 $\frac{3}{11}=0.272727\cdots=0.\dot{2}\dot{7}$이므로 점 P는 2회마다 일정한 이동을 반복한다.
$a_1=a_3=a_5=\cdots=2$, $a_2=a_4=a_6=\cdots=7$이므로
$2+(-7)=-5$
즉, 점 P는 2회 이동할 때마다 왼쪽으로 5만큼씩 이동한다.
$52=2\times26$이므로 점 P는 52회 이동할 때 왼쪽으로
$5\times26=130$만큼 이동하게 된다.
따라서 수직선에서 점 P_{52}에 대응하는 수는
$1+(-130)=-129$

05 $x-[x]=0$을 만족하는 x는 정수이므로
$x=11, 12, 13, \cdots, 100$
즉, $\frac{1}{x}$은 모두 90개이므로
$90-\left(\text{유한소수가 되는 } \frac{1}{x}\text{의 개수}\right)$를 구하면 된다.
이때 $\frac{1}{x}$이 유한소수가 되려면 $\frac{1}{2^a\times5^b}$ (단, a, b는 음이 아닌 정수)의 꼴이어야 하므로
(ⅰ) $\frac{1}{x}$이 $\frac{1}{2^a}$의 꼴이 될 때의 개수는
a의 값이 4, 5, 6일 때의 3개
(ⅱ) $\frac{1}{x}$이 $\frac{1}{2^a\times5}$의 꼴이 될 때의 개수는
a의 값이 2, 3, 4일 때의 3개
(ⅲ) $\frac{1}{x}$이 $\frac{1}{2^a\times5^2}$의 꼴이 될 때의 개수는
a의 값이 1, 2일 때의 2개
(ⅳ) $\frac{1}{x}$이 $\frac{1}{5^b}$의 꼴이 될 때의 개수는
b의 값이 2일 때의 1개
(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 유한소수가 되는 $\frac{1}{x}$의 개수는
$3+3+2+1=9$(개)이다.
따라서 순환소수가 되는 $\frac{1}{x}$의 개수는 $90-9=81$(개)

06 $84x-k=13$에서
$x=\frac{k+13}{84}=\frac{k+13}{2^2\times3\times7}$
x가 유한소수가 되려면 분모의 3×7이 약분되어야 하므로
$k+13$은 21의 배수이어야 한다.
이때 k는 세 자리의 자연수이므로
$k+13=21\times5=105$에서 $k=92$
$k+13=21\times6=126$에서 $k=113$
따라서 가장 작은 세 자리의 자연수 k의 값은 113이다.

07 ㈎에서 $\frac{15}{x}=\frac{3\times5}{x}$는 기약분수이므로 x는 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.
㈏에서 $\frac{1}{3}<\frac{15}{x}<1$이므로
$1<\frac{x}{15}<3$　　$\therefore 15<x<45$
㈐에서 $\frac{15}{x}$가 유한소수가 되므로 x의 소인수는 2나 5뿐이어야 하는데, 조건 ㈎에 의하여 x의 소인수는 2뿐이다.
따라서 소인수가 2뿐이고 $15<x<45$인 x의 값은 2^4과 2^5, 즉 16과 32이다.

08 29^n을 10으로 나눈 나머지는 29^n의 일의 자리의 숫자이다.
이때 (29^n의 일의 자리의 숫자)=(9^n의 일의 자리의 숫자)이고 9^n의 일의 자리의 숫자는 9, 1의 순서로 되풀이되므로 $a_1=9$, $a_2=1$, $a_3=9$, $a_4=1$, $\cdots$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots\\ &=0.9+0.01+0.009+0.0001+\cdots\\ &=0.919191\cdots\\ &=0.\dot{9}\dot{1}=\frac{91}{99}\end{aligned}$$

09 $0.a\dot{b}c\dot{d}=\frac{1000a+100b+10c+d-(10a+b)}{9900}$
$=\frac{990a+99b+10c+d}{9900}$
$1237=990\times1+247$
$=990\times1+99\times2+49$
$=990\times1+99\times2+10\times4+9$
$\therefore a=1,\ b=2,\ c=4,\ d=9$

10 $0.3\dot{1}\dot{a}=\frac{(310+a)-3}{990}=\frac{307+a}{990}$
$\frac{b}{330}=\frac{b\times3}{330\times3}=\frac{3b}{990}$
즉, $\frac{307+a}{990}=\frac{3b}{990}$이므로 $307+a=3b$
이때 $3b$는 3의 배수이므로 $307+a$도 3의 배수이어야 한다.
a는 $1\le a\le9$인 자연수이므로 $a=2, 5, 8$이다.
(ⅰ) $a=2$일 때,
$3b=309$에서 $b=103$　　$\therefore b-a=101$
(ⅱ) $a=5$일 때,
$3b=312$에서 $b=104$　　$\therefore b-a=99$
(ⅲ) $a=8$일 때,
$3b=315$에서 $b=105$　　$\therefore b-a=97$
따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의해 $b-a$의 값은 97, 99, 101이다.

11 $a=0.4\dot{2}\dot{7}=\frac{427-4}{990}=\frac{423}{990}$,
$b=999.\dot{9}=\frac{9000}{9}=1000$, $c=9.\dot{9}=\frac{90}{9}=10$이므로
$a(b-c)=\frac{423}{990}(1000-10)$
$=\frac{423}{990}\times990=423$
따라서 3자리의 자연수이다.

12 $a=0.6\dot{9}=\frac{63}{90}=\frac{7}{10}=0.7$, $c=0.\dot{5}\dot{3}=\frac{53}{99}$,

$e=0.\dot{9}=\frac{9}{9}=1$이다.

$a=b$이므로 $a◎b=0$

$c<d$이므로 $c◎d=d=\frac{53}{90}$

즉, $(a◎b)◎(c◎d)=0◎\frac{53}{90}=\frac{53}{90}$이므로

$\{(a◎b)◎(c◎d)\}◎e=\frac{53}{90}◎1=1$

13 (가)에서 $\frac{3}{9}<\frac{a}{9}<\frac{45}{99}$, $\frac{33}{99}<\frac{11a}{99}<\frac{45}{99}$

$\therefore\ 33<11a<45$

즉, 자연수 a의 값은 4이다.

(나)에서 $\frac{4}{9}<\frac{10a+b}{99}<\frac{16}{33}$, $\frac{44}{99}<\frac{10a+b}{99}<\frac{48}{99}$

$\therefore\ 44<10a+b<48$

이때 $a=4$이므로 $4<b<8$

즉, 자연수 b의 값은 5, 6, 7이다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(4,\ 5)$, $(4,\ 6)$, $(4,\ 7)$이다.

14 $\langle 1,\ 2\rangle=0.\dot{1}+0.0\dot{2}=\frac{1}{9}+\frac{2}{90}=\frac{10+2}{90}=\frac{12}{90}$

$[2,\ 4]=0.\dot{2}+0.00\dot{4}=\frac{2}{9}+\frac{4}{900}=\frac{200+4}{900}=\frac{204}{900}$

$\langle 1,\ 2\rangle+[2,\ 4]=162\times A$에서

$\frac{12}{90}+\frac{204}{900}=162\times A$, $\frac{324}{900}=162\times A$

$\therefore\ A=\frac{324}{900}\times\frac{1}{162}=\frac{2}{900}=0.00\dot{2}$

15 어떤 수를 x라 하면

$x\times 1.\dot{8}-x\times 1.1\dot{8}=1.3\dot{9}$이므로

$\frac{17}{9}x-\frac{107}{90}x=\frac{126}{90}$

$\frac{170}{90}x-\frac{107}{90}x=\frac{126}{90}$

$\frac{63}{90}x=\frac{126}{90}$ $\qquad\therefore\ x=2$

따라서 바르게 계산한 결과는

$x\times 1.\dot{8}=2\times\frac{17}{9}=\frac{34}{9}=3.\dot{7}$

16 $0.\dot{a}\dot{b}\times\frac{8}{3}=0.\dot{b}\dot{a}$에서

$\frac{10a+b}{99}\times\frac{8}{3}=\frac{10b+a}{99}$이므로

$8(10a+b)=3(10b+a)$

$80a+8b=30b+3a$, $77a=22b$

$\therefore\ 7a=2b$

이때 a와 b는 모두 한 자리의 자연수이므로

$a=2$, $b=7$

$\therefore\ 0.\dot{a}\dot{b}+0.\dot{b}\dot{a}=0.\dot{2}\dot{7}+0.\dot{7}\dot{2}=\frac{27}{99}+\frac{72}{99}=1$

17 A 케이블카로 갈 때와 올 때 걸리는 시간은 각각 $\frac{x}{\frac{a}{9}}$, $\frac{x}{\frac{b}{9}}$

이므로

(A 케이블카로 왕복하는 데 걸리는 시간)

$=\frac{x}{\frac{a}{9}}+\frac{x}{\frac{b}{9}}=\frac{9x(a+b)}{ab}$

B 케이블카로 갈 때와 올 때 걸리는 시간은 각각 $\frac{x}{\frac{a}{10}}$, $\frac{x}{\frac{b}{10}}$

이므로

(B 케이블카로 왕복하는 데 걸리는 시간)

$=\frac{x}{\frac{a}{10}}+\frac{x}{\frac{b}{10}}=\frac{10x(a+b)}{ab}$

$\therefore\ \frac{\frac{10x(a+b)}{ab}}{\frac{9x(a+b)}{ab}}=\frac{10}{9}$

따라서 B 케이블카로 왕복하는 데 걸리는 시간은 A 케이블카로 왕복하는 데 걸리는 시간의 $\frac{10}{9}$배이다.

18 $0.\dot{a}=\frac{a}{9}$, $0.0\dot{b}=\frac{b}{90}$, $0.00\dot{c}=\frac{c}{900}$이므로

$(0.0\dot{b})^2=0.\dot{a}\times 0.00\dot{c}$에서

$\left(\frac{b}{90}\right)^2=\frac{a}{9}\times\frac{c}{900}$, $\frac{b^2}{8100}=\frac{ac}{8100}$ $\qquad\therefore\ b^2=ac$

따라서 $a=2$, $c=8$일 때, $b^2=16$인 경우만 성립한다.

$\therefore\ b=4$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.16~17

01 9	**02** 22	**03** 1	**04** 0	**05** 15
06 $m=6$, $n=8$	**07** 8, 31			

01 음이 아닌 정수 k에 대하여

$n=11k+1$이면 $\frac{n}{11}=k+\frac{1}{11}$,

$n=11k+2$이면 $\frac{n}{11}=k+\frac{2}{11}$,

$\vdots$

$n=11k+10$이면 $\frac{n}{11}=k+\frac{10}{11}$

이므로

$\frac{n}{11}$의 순환마디를 구하기 위해 $0<\frac{n}{11}<1$인 범위에서만 생각해도 된다.

이때 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$이므로

$\frac{1}{11}=\frac{1\times 9}{11\times 9}=\frac{9}{99}=0.\dot{0}\dot{9}$ $\qquad\therefore\ f(1)=0+9=9$

$\frac{2}{11}=\frac{2\times 9}{11\times 9}=\frac{18}{99}=0.\dot{1}\dot{8}$ $\qquad\therefore\ f(2)=1+8=9$

$\frac{3}{11}=\frac{3\times 9}{11\times 9}=\frac{27}{99}=0.\dot{2}\dot{7}$ $\qquad\therefore\ f(3)=2+7=9$

같은 방법으로 계속하면

$\frac{4}{11}=0.\dot{3}\dot{6}$, $\frac{5}{11}=0.\dot{4}\dot{5}$, $\frac{6}{11}=0.\dot{5}\dot{4}$, $\frac{7}{11}=0.\dot{6}\dot{3}$,

$\frac{8}{11}=0.\dot{7}\dot{2}$, $\frac{9}{11}=0.\dot{8}\dot{1}$, $\frac{10}{11}=0.\dot{9}\dot{0}$

이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)$

$\quad=f(7)=f(8)=f(9)=f(10)=9$

따라서 $f(n)=9$이다.

02 (가)에서 $\frac{a}{b}$는 유한소수가 아니므로 b의 소인수에 2나 5 이외의 수가 있어야 한다.

즉, b는 3, 6, 7, 9 중 하나이다.

그런데 분모가 3 또는 9이면 $0.\dot{x}$의 꼴이고, 분모가 7이면 순환마디의 숫자가 6개이므로 (나)에서 $b=6$이다.

이때 $\frac{a}{b}<1$이므로 $a=1, 2, 3, 4, 5$

그런데 a가 2, 3, 4이면 분모 6과 약분되어 조건 (나)를 만족하지 않으므로 $a=1, 5$이다.

(i) $a=1$일 때,

$\frac{1}{6}=0.1\dot{6}$이고 $\frac{a}{b}=0.c\dot{d}$에서

$a=c$, $b=d$이므로 성립하지 않는다.

(ii) $a=5$일 때,

$\frac{5}{6}=0.8\dot{3}$이고 $\frac{a}{b}=0.c\dot{d}$에서

$a=5$, $b=6$, $c=8$, $d=3$이므로 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $a+b+c+d=22$

03 사각형 A, B를 각각 직선 l, l'을 축으로 하여 1회전시킬 때 생기는 회전체는 모두 원뿔대이다.

이때 A를 회전시킨 회전체의 밑면의 반지름의 길이는 각각 $0.\dot{a}$, $0.\dot{b}$이므로

$$V_{\mathrm{A}}=\frac{1}{3}\pi\{(0.\dot{b})^2(h'+h)-(0.\dot{a})^2h'\}$$
$$=\frac{1}{3}\pi\left\{\left(\frac{b}{9}\right)^2(h'+h)-\left(\frac{a}{9}\right)^2h'\right\}$$
$$=\frac{1}{81}\times\frac{1}{3}\pi\{(b^2-a^2)h'+b^2h\}$$

B를 회전시킨 회전체의 밑면의 반지름의 길이는 각각 $0.a$, $0.b$이므로

$$V_{\mathrm{B}}=\frac{1}{3}\pi\{(0.b)^2(h'+h)-(0.a)^2h'\}$$
$$=\frac{1}{3}\pi\left\{\left(\frac{b}{10}\right)^2(h'+h)-\left(\frac{a}{10}\right)^2h'\right\}$$
$$=\frac{1}{100}\times\frac{1}{3}\pi\{(b^2-a^2)h'+b^2h\}$$

$$\therefore (1.\dot{c})^2=\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}}=\frac{\frac{1}{81}}{\frac{1}{100}}=\frac{100}{81}$$
$$=\left(\frac{10}{9}\right)^2=(1.\dot{1})^2$$

따라서 $c=1$이다.

04 1보다 작은 두 순환소수의 합이 자연수이므로 그 합은 1이다.

$0.\dot{a}bc\dot{d}+0.\dot{c}da\dot{b}$

$=\frac{1000a+100b+10c+d}{9999}+\frac{1000c+100d+10a+b}{9999}$

$=\frac{1010a+101b+1010c+101d}{9999}$

$=\frac{101(10a+b+10c+d)}{9999}=1$

$\therefore 10a+b+10c+d=99$, 즉 $10(a+c)+b+d=99$

a, b, c, d가 서로 다른 한 자리의 자연수이므로

$3\le a+c\le 17$, $3\le b+d\le 17$

$\therefore a+c=9$, $b+d=9$

따라서 $a-b+c-d=a+c-(b+d)=9-9=0$

05 $\frac{n}{m}=0.\dot{a}\dot{b}=\frac{10a+b}{99}$

$\frac{m}{n}=3.\dot{c}=\frac{(30+c)-3}{9}=\frac{27+c}{9}$

$\frac{n}{m}\times\frac{m}{n}=1$이므로 $\frac{10a+b}{99}\times\frac{27+c}{9}=1$

$\therefore (10a+b)(27+c)=99\times 9$

이때 c는 한 자리의 자연수이므로 $28\le 27+c\le 36$이고

$99\times 9=27\times 33$이므로

$27+c=33$ $\quad\therefore c=6$

따라서 $10a+b=27$에서 $a=2$, $b=7$

$\therefore a+b+c=2+7+6=15$

06 $\langle a\rangle x-[b]=2.\dot{9}x-3.\dot{9}$에서 $(\langle a\rangle-2.\dot{9})x=[b]-3.\dot{9}$

이 방정식의 해가 무수히 많으려면 $0\times x=0$의 꼴이어야 하므로

$\langle a\rangle-2.\dot{9}=0$이고, $[b]-3.\dot{9}=0$이어야 한다.

$\langle a\rangle=2.\dot{9}=\frac{27}{9}=3$, 즉 $2<a\le 3$

$[b]=3.\dot{9}=\frac{36}{9}=4$, 즉 $4\le b<5$

따라서 $6<a+b<8$이므로 $m=6$, $n=8$

07 $0.a9\dot{4}=\frac{(100a+94)-(10a+9)}{900}$

$\qquad=\frac{90a+85}{900}=\frac{18a+17}{180}$

$\frac{n}{36}=\frac{n\times 5}{36\times 5}=\frac{5n}{180}$

즉, $\frac{18a+17}{180}=\frac{5n}{180}$이므로 $18a+17=5n$

이때 $5n=5(3a+3)+3a+2$이므로 $3a+2$는 5의 배수가 되어야 한다.

(i) $a=1$일 때,

$5n=35$에서 $n=7$ $\quad\therefore a+n=8$

(ii) $a=6$일 때,

$5n=125$에서 $n=25$ $\quad\therefore a+n=31$

따라서 $a+n$의 값은 8, 31이다.

2 단항식의 계산

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.19~22

1-1 175　1-2 45　1-3 1430　1-4 6　1-5 2^8

2-1 ⑤　2-2 ④　2-3 ③　3-1 2　3-2 ③

3-3 ②　3-4 -1　3-5 2

4-1 1^{400}, 4^{100}, 2^{300}, 3^{200}　4-2 현수　4-3 4, 5

5-1 17자리　5-2 200　5-3 ④　5-4 21

6-1 (1) $-\dfrac{x}{y^3}$ (2) $-\dfrac{12a^3}{b}$　6-2 (1) $\dfrac{10a}{b^2}$ (2) $\dfrac{16b^5}{9a}$

6-3 ⑤　6-4 $\dfrac{27}{100}$　6-5 $\dfrac{6b}{5a^6}$　6-6 $a=2$, $b=3$

7-1 $\dfrac{6x^2}{y}$　7-2 48명　7-3 $78a^3b^4$, $72a^3b^4$　7-4 3배

1-1 $a\times a^2\times a^3\times\cdots\times a^{10}=a^{1+2+3+\cdots+10}=a^{55}=a^m$

$\therefore m=55$

$[\{(a^2)^3\}^4]^5=a^{2\times3\times4\times5}=a^{120}=a^n$ $\quad\therefore n=120$

$\therefore m+n=55+120=175$

1-2 $20^{20}=A\times50^{10}$에서

$A=\dfrac{20^{20}}{50^{10}}=\dfrac{(2^2\times5)^{20}}{(2\times5^2)^{10}}=\dfrac{2^{40}\times5^{20}}{2^{10}\times5^{20}}=2^{30}$

$6^{30}=B\times18^{15}$에서

$B=\dfrac{6^{30}}{18^{15}}=\dfrac{(2\times3)^{30}}{(2\times3^2)^{15}}=\dfrac{2^{30}\times3^{30}}{2^{15}\times3^{30}}=2^{15}$

$\therefore AB=2^{30}\times2^{15}=2^{45}$ $\quad\therefore n=45$

1-3 $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14\times15$

$=1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)$

$\quad\times11\times(2^2\times3)\times13\times(2\times7)\times(3\times5)$

$=2^{11}\times3^6\times5^3\times7^2\times11\times13$

$\dfrac{1\times2\times3\times\cdots\times14\times15}{n}$가 어떤 자연수의 제곱이 되려면 분자의 소인수들의 지수가 짝수가 되어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 n의 값은

$2\times5\times11\times13=1430$

1-4 $(x^ay^bz^c)^k=x^{ak}y^{bk}z^{ck}=x^{30}y^{24}z^{36}$에서

$ak=30$, $bk=24$, $ck=36$을 만족하는 가장 큰 자연수 k는 30, 24, 36의 최대공약수이다.

$\therefore k=6$

1-5 $\left(\dfrac{16^6+4^9}{16^5+4^7}\right)^2=\left\{\dfrac{(2^4)^6+(2^2)^9}{(2^4)^5+(2^2)^7}\right\}^2=\left(\dfrac{2^{24}+2^{18}}{2^{20}+2^{14}}\right)^2$

$=\left(\dfrac{2^6\times2^{18}+2^{18}}{2^6\times2^{14}+2^{14}}\right)^2=\left\{\dfrac{2^{18}(2^6+1)}{2^{14}(2^6+1)}\right\}^2$

$=(2^4)^2=2^8$

2-1 $a=3^{x-1}$에서

$a=3^x\times3^{-1}=\dfrac{1}{3}\times3^x$이므로 $3^x=3a$

$\therefore 9^x=(3^2)^x=(3^x)^2=(3a)^2=9a^2$

2-2 ① $(-1)^{-4}=\dfrac{1}{(-1)^4}=1$

② $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}=(2^{-1})^{-3}=2^3=8$

③ $4^{-3}\times\dfrac{1}{16^{-2}}=(2^2)^{-3}\times\dfrac{1}{(2^4)^{-2}}=2^{-6}\times\dfrac{1}{2^{-8}}$

$=2^{-6}\times2^8=2^2=4$

④ $0.5^3\times2^{-2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{2^3}\times\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}$

⑤ $\left(\dfrac{1}{10}\right)^0\div2^{-4}=1\div\dfrac{1}{2^4}=1\div\dfrac{1}{16}=16$

따라서 가장 작은 수는 ④이다.

2-3 $\dfrac{a^{-m}+a^{-n}}{a^m+a^n}=\dfrac{\dfrac{1}{a^m}+\dfrac{1}{a^n}}{a^m+a^n}=\dfrac{\dfrac{a^m+a^n}{a^ma^n}}{a^m+a^n}$

$=\dfrac{1}{a^ma^n}=\dfrac{1}{a^{m+n}}=(a^{m+n})^{-1}=a^{-m-n}$

3-1 $8^x\times\dfrac{1}{4}=(2^3)^x\times(2^2)^{-1}=2^{3x}\times2^{-2}=2^{3x-2}$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}=(2^{-1})^{-4}=2^4$

즉, $2^{3x-2}=2^4$에서 $3x-2=4$, $3x=6$

$\therefore x=2$

3-2 $4^x+4^x+4^x+4^x=4\times4^x=2^2\times2^{2x}=2^{2+2x}$

즉, $2^{2+2x}=2^8$에서 $2+2x=8$, $2x=6$

$\therefore x=3$

3-3 $0.125^x=\left(\dfrac{125}{1000}\right)^x=\left(\dfrac{1}{8}\right)^x=\left(\dfrac{1}{2^3}\right)^x=(2^{-3})^x=2^{-3x}$

$512=2^9$

즉, $2^{-3x}=2^9$에서 $-3x=9$ $\quad\therefore x=-3$

3-4 $\dfrac{a^{-2}}{a^2}=a^{-2}\times a^{-2}=a^{-4}$

$a^{-3}=2$이므로 $2a^x=a^{-3}\times a^x=a^{-3+x}$

즉, $a^{-4}=a^{-3+x}$에서 $-4=-3+x$

$\therefore x=-1$

3-5 $5^{x-1}+5^x+5^{x+1}=155$에서

$5^x\times\dfrac{1}{5}+5^x+5^x\times5=155$, $\left(\dfrac{1}{5}+1+5\right)\times5^x=155$

$\dfrac{31}{5}\times5^x=155$, $5^x=25$ $\quad\therefore x=2$

4-1 지수를 같게 하면

$1^{400}=(1^4)^{100}=1^{100}$, $2^{300}=(2^3)^{100}=8^{100}$, $3^{200}=(3^2)^{100}=9^{100}$

따라서 $1^{100}<4^{100}<8^{100}<9^{100}$이므로

$1^{400}<4^{100}<2^{300}<3^{200}$

4-2 지민이가 만든 국수의 가닥 수는
$2^{15}=(2^3)^5=8^5$(가닥)
현수가 만든 국수의 가닥 수는
$3^{10}=(3^2)^5=9^5$(가닥)
$8^5<9^5$에서 $2^{15}<3^{10}$
따라서 현수가 만든 국수의 가닥이 더 많다.

4-3 각 항의 지수를 같게 하면
$16^{1000}\le(x^2)^{1000}\le(3^3)^{1000}$
$16^{1000}\le(x^2)^{1000}\le27^{1000}$
$\therefore\ 16\le x^2\le27$
즉, $16\le x^2\le27$을 만족하는 자연수 x의 값은 4, 5이다.

5-1 $2^{15}\times3^4\times5^{14}=2\times3^4\times(2\times5)^{14}$
$=162\times10^{14}$
$=162\underbrace{00\cdots0}_{14\text{개}}$
따라서 17자리의 자연수이다.

5-2 (7^n을 10으로 나눈 나머지)=(7^n의 일의 자리의 숫자)이고 7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1의 순서로 반복되므로
$f(1)=7,\ f(2)=9,\ f(3)=3,\ f(4)=1,$
$f(5)=7,\ f(6)=9,\ \cdots$
$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(40)$
$=10\times(7+9+3+1)=200$

5-3 83의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자와 같으므로 3, 9, 7, 1의 순서로 반복된다.
$83=4\times20+3$이므로 83^{83}의 일의 자리의 숫자는 83^3의 일의 자리의 숫자와 같은 7이다.

5-4 $\dfrac{2^{20}\times15^{40}}{45^{20}}=\dfrac{2^{20}\times(15^2)^{20}}{45^{20}}=\left(\dfrac{2\times15^2}{45}\right)^{20}$
$=\left(\dfrac{2\times3^2\times5^2}{3^2\times5}\right)^{20}=(2\times5)^{20}=10^{20}$
따라서 21자리의 자연수이므로 $n=21$이다.

6-1 (1) $(x^2y)^2\div\{-(x^5y^3)^3\}\times(-x^3y)^4$
$=x^4y^2\div(-x^{15}y^9)\times x^{12}y^4$
$=x^4y^2\times\left(-\dfrac{1}{x^{15}y^9}\right)\times x^{12}y^4=-\dfrac{x}{y^3}$

(2) $(-2a^3b)\times(3ab)^2\div\dfrac{3}{2}(-ab^2)^2$
$=(-2a^3b)\times9a^2b^2\div\dfrac{3}{2}a^2b^4$
$=(-2a^3b)\times9a^2b^2\times\dfrac{2}{3a^2b^4}=-\dfrac{12a^3}{b}$

6-2 (1) $\left(-\dfrac{3}{5}a^3b\right)\times(-2ab^3)\times\boxed{}=12a^5b^2$에서
$\dfrac{6}{5}a^4b^4\times\boxed{}=12a^5b^2$
$\therefore\ \boxed{}=12a^5b^2\times\dfrac{5}{6a^4b^4}=\dfrac{10a}{b^2}$

(2) $18a^4b^2\div\boxed{}\div\left(-\dfrac{3a}{2b^2}\right)^3=-3a^2b^3$에서
$18a^4b^2\div\boxed{}\div\left(-\dfrac{27a^3}{8b^6}\right)=-3a^2b^3$
$\therefore\ \boxed{}=18a^4b^2\times\left(-\dfrac{8b^6}{27a^3}\right)\times\left(-\dfrac{1}{3a^2b^3}\right)=\dfrac{16b^5}{9a}$

6-3 $(2x^{n+1})^4\div\left(-\dfrac{8}{3}x^{2n+1}\right)^2=16x^{4n+4}\div\dfrac{64}{9}x^{4n+2}$
$=16x^{4n+4}\times\dfrac{9}{64x^{4n+2}}=\dfrac{9}{4}x^2$

6-4 $2x^3y^3z\times(-3x^2y^2z^2)\div\{(-x)^3(-y^2z)\}$
$=\dfrac{2x^3y^3z\times(-3x^2y^2z^2)}{x^3y^2z}=-6x^2y^3z^2$
$=-6\times3^2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3\times0.2^2=\dfrac{27}{100}$

6-5 $\dfrac{18}{5}a^4b^8\div A=-6a^2b^5$에서
$A=\dfrac{18}{5}a^4b^8\times\left(-\dfrac{1}{6a^2b^5}\right)=-\dfrac{3}{5}a^2b^3$
$A\times B\div\dfrac{3}{10}a^3b=a^7b^4$에서
$\left(-\dfrac{3}{5}a^2b^3\right)\times B\times\dfrac{10}{3a^3b}=a^7b^4$
$\left(-\dfrac{2b^2}{a}\right)\times B=a^7b^4$
$\therefore\ B=a^7b^4\times\left(-\dfrac{a}{2b^2}\right)=-\dfrac{1}{2}a^8b^2$
$\therefore\ \dfrac{A}{B}=\left(-\dfrac{3}{5}a^2b^3\right)\div\left(-\dfrac{1}{2}a^8b^2\right)$
$=\left(-\dfrac{3a^2b^3}{5}\right)\times\left(-\dfrac{2}{a^8b^2}\right)=\dfrac{6b}{5a^6}$

6-6 $\left(\dfrac{3x}{y^2}\right)^a\div\left(-\dfrac{y^3}{x}\right)^b\times\left(-\dfrac{1}{3}x^2y^3\right)^2=-\dfrac{x^9}{y^7}$
$\dfrac{3^ax^a}{y^{2a}}\div\left\{(-1)^b\dfrac{y^{3b}}{x^b}\right\}\times\dfrac{1}{9}x^4y^6=-\dfrac{x^9}{y^7}$
$\dfrac{3^ax^a}{y^{2a}}\times\dfrac{x^b}{(-1)^by^{3b}}\times\dfrac{x^4y^6}{9}=-\dfrac{x^9}{y^7}$
$\dfrac{3^a}{(-1)^b\times9}\times\dfrac{x^{a+b+4}}{y^{2a+3b-6}}=-\dfrac{x^9}{y^7}$
이때 b는 홀수이고 $\dfrac{3^a}{9}=1$이므로
$3^a=9=3^2\qquad\therefore\ a=2$
$a+b+4=9$에서 $2+b+4=9$
$\therefore\ b=3$

7-1 물통의 높이를 A라 하면
$\pi(3xy^2)^2\times\dfrac{2}{3}A=36\pi x^4y^3,\ 9\pi x^2y^4\times\dfrac{2}{3}A=36\pi x^4y^3$
$6\pi x^2y^4\times A=36\pi x^4y^3$
$\therefore\ A=\dfrac{36\pi x^4y^3}{6\pi x^2y^4}=\dfrac{6x^2}{y}$

7-2 원기둥 모양의 통의 부피는 $\pi r^2\times 4r=4\pi r^3$

반구 모양의 컵의 부피는 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}r\right)^3=\frac{1}{12}\pi r^3$

$\therefore\ 4\pi r^3\div\frac{1}{12}\pi r^3=4\pi r^3\times\frac{12}{\pi r^3}=48$

따라서 최대 48명의 사람들에게 나누어 줄 수 있다.

7-3 (작은 직사각형 하나의 넓이)

$=$(가로의 길이)$\times$(세로의 길이)

$=\left(10ab^3\times\frac{1}{5}\right)\times\left(15a^2b\times\frac{1}{5}\right)$

$=2ab^3\times 3a^2b=6a^3b^4$

이때 검은 직사각형은 13개, 흰 직사각형은 12개이므로

(검은 직사각형의 넓이의 합)$=6a^3b^4\times 13=78a^3b^4$

(흰 직사각형의 넓이의 합)$=6a^3b^4\times 12=72a^3b^4$

[다른 풀이]

(전체 직사각형의 넓이)$=10ab^3\times 15a^2b=150a^3b^4$

이때 서로 합동인 25개의 직사각형 중 검은 직사각형은 13개, 흰 직사각형은 12개이므로

(검은 직사각형의 넓이의 합)$=150a^3b^4\times\frac{13}{25}=78a^3b^4$

(흰 직사각형의 넓이의 합)$=150a^3b^4\times\frac{12}{25}=72a^3b^4$

7-4 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 $2a$이므로 구의 반지름의 길이는 a이다.

(원기둥의 부피)$=\pi(2a)^2\times 2a$

$=4\pi a^2\times 2a=8\pi a^3$

(구 2개의 부피의 합)$=2\times\left(\frac{4}{3}\pi\times a^3\right)$

$=\frac{8}{3}\pi a^3$

$\therefore\ \frac{(\text{원기둥의 부피})}{(\text{구 2개의 부피의 합})}=\frac{8\pi a^3}{\frac{8}{3}\pi a^3}=3$

따라서 3배이다.

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.23~25

01 ②

02 (1) $L(X)+L(Y)$ (2) $L(X)-L(Y)$ (3) $L(X)L(Y)$

03 11 **04** 8 **05** 19, 12 **06** ⑤ **07** 9

08 ④ **09** ② **10** ③ **11** $x=4$, $y=3$

12 $(6^{14},\ 5^{15})$ **13** ② **14** ④ **15** $-\frac{24}{25}$

16 $A=\frac{b^2}{8a^3}$, $B=8a^3b^5$ **17** 8.9 % 증가

18 5

01 $2^n+2^{n+1}=2^n+2\times 2^n=(1+2)\times 2^n=3\times 2^n$

$\therefore\ 3^{n-1}(2^n+2^{n+1})=3^{n-1}\times(3\times 2^n)=3^n\times 2^n=ab$

02 $X=a^m$, $Y=a^n$이므로

$L(X)=L(a^m)=m$, $L(Y)=L(a^n)=n$

(1) $L(XY)=L(a^m\times a^n)$

$=L(a^{m+n})$

$=m+n$

$=L(X)+L(Y)$

(2) $L\left(\frac{X}{Y}\right)=L\left(\frac{a^m}{a^n}\right)$

$=L(a^{m-n})$

$=m-n$

$=L(X)-L(Y)$ ($\because\ m>n$)

(3) $L(X^n)=L((a^m)^n)$

$=L(a^{mn})$

$=mn$

$=L(X)L(Y)$

03 $\frac{512^4-8\times 256^4}{256^3}=\frac{(2\times 256)^4-8\times 256^4}{256^3}$

$=\frac{2^4\times 256^4-2^3\times 256^4}{256^3}$

$=\frac{256^4(2^4-2^3)}{256^3}$

$=256\times 8$

$=2^8\times 2^3$

$=2^{11}$

$\therefore\ S\left[\frac{512^4-8\times 256^4}{256^3}\right]=S[2^{11}]=11$

04 $2^n(5^{n+1}-5^n)=2^n(5\times 5^n-5^n)$

$=2^n\times(4\times 5^n)$

$=2^n\times 2^2\times 5^n$

$=2^{n+2}5^n$

약수의 개수가 99개이므로

$(n+3)(n+1)=99=11\times 9$에서

$n+3=11$, $n+1=9$

$\therefore\ n=8$

05 $\frac{3^7\times 10^8\times 12^3\times 45^{11}}{6^{12}\times 15^x}$

$=\frac{3^7\times(2\times 5)^8\times(2^2\times 3)^3\times(3^2\times 5)^{11}}{(2\times 3)^{12}\times(3\times 5)^x}$

$=\frac{3^7\times 2^8\times 5^8\times 2^6\times 3^3\times 3^{22}\times 5^{11}}{2^{12}\times 3^{12}\times 3^x\times 5^x}$

$=\frac{2^{14}\times 3^{32}\times 5^{19}}{2^{12}\times 3^{x+12}\times 5^x}$

$=\frac{2^2\times 3^{20}\times 5^{19}}{3^x\times 5^x}$

따라서 $x=19$일 때 가장 작은 자연수가 되고 그때의 자연수는 $\frac{2^2\times 3^{20}\times 5^{19}}{3^{19}\times 5^{19}}=2^2\times 3=12$이다.

06 $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=\dfrac{a+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}+b}=\dfrac{\dfrac{ab+1}{b}}{\dfrac{1+ab}{a}}=\dfrac{a}{b}$

$\dfrac{a}{b}=5$이므로 $a=5b$

$\therefore\ \dfrac{a-3b}{3a+5b}=\dfrac{5b-3b}{15b+5b}=\dfrac{2b}{20b}=\dfrac{1}{10}$

07 $\dfrac{x^2+x^4+x^6}{x^{-3}+x^{-5}+x^{-7}}=\dfrac{x^2+x^4+x^6}{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{x^7}}$에서 분모와 분자에

각각 x^7을 곱하면

$\dfrac{x^7(x^2+x^4+x^6)}{x^4+x^2+1}=\dfrac{x^9(x^4+x^2+1)}{x^4+x^2+1}=x^9$

$\therefore\ a=9$

08 $2^{x-1}=A$에서 $\dfrac{2^x}{2}=A$ $\quad\therefore\ 2^x=2A$

$5^{1-x}=B$에서 $\dfrac{5}{5^x}=B$ $\quad\therefore\ 5^x=\dfrac{5}{B}$

$\therefore 100^x=(2^2\times5^2)^x=2^{2x}\times5^{2x}=(2^x\times5^x)^2$

$=\left(2A\times\dfrac{5}{B}\right)^2=\left(\dfrac{10A}{B}\right)^2$

09 $\dfrac{x^y y^x}{x^x y^y}=\dfrac{y^x}{x^x}\times\dfrac{x^y}{y^y}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^x\times\left(\dfrac{x}{y}\right)^y$

$=\left(\dfrac{y}{x}\right)^x\times\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-y}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{x-y}$

$\therefore\ m=x-y$

10 $3^{2x+4}\times9^{3-x}\times4^x=3^{2x+4}\times3^{2(3-x)}\times2^{2x}$

$=3^{(2x+4)+(6-2x)}\times2^{2x}$

$=2^{2x}\times3^{10}$

$81\times6^{2x}=3^4\times(2\times3)^{2x}=2^{2x}\times3^{2x+4}$

즉, $2^{2x}\times3^{10}=2^{2x}\times3^{2x+4}$에서 $3^{10}=3^{2x+4}$이므로

$10=2x+4$ $\quad\therefore\ x=3$

11 $10044=3^4\times124=3^4\times(125-1)=3^4\times(5^3-1)$

즉, $3^x(5^y-1)=3^4\times(5^3-1)$에서 $x=4,\ y=3$

12 $2^{35},\ 5^{15}$에서 두 지수의 최대공약수가 5이므로

$2^{35}=(2^7)^5=128^5$

$5^{15}=(5^3)^5=125^5$

즉, $128^5>125^5$에서 $2^{35}>5^{15}$

또 $2^{35},\ 6^{14}$에서 두 지수의 최대공약수가 7이므로

$2^{35}=(2^5)^7=32^7$

$6^{14}=(6^2)^7=36^7$

즉, $32^7<36^7$에서 $2^{35}<6^{14}$

따라서 $6^{14}>2^{35}>5^{15}$이므로

$(L,\ S)=(6^{14},\ 5^{15})$

13 3의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1의 순서로 반복되므로

$\langle 123^{45}\rangle=\langle 3^{45}\rangle=\langle 3^{4\times11+1}\rangle=\langle 3\rangle=3$

8의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6의 순서로 반복되므로

$\langle 8^{88}+8^{99}\rangle=\langle\langle 8^{88}\rangle+\langle 8^{99}\rangle\rangle=\langle\langle 8^{4\times22}\rangle+\langle 8^{4\times24+3}\rangle\rangle$

$=\langle\langle 8^4\rangle+\langle 8^3\rangle\rangle=\langle 6+2\rangle=8$

$\therefore\ \langle\langle 123^{45}\rangle+\langle 8^{88}+8^{99}\rangle\rangle=\langle 3+8\rangle=\langle 11\rangle=1$

14 $ab^3\times(a^4b^3)^2\div\{(ab)^2\}^4$

$=ab^3\times a^8b^6\div a^8b^8=ab^3\times a^8b^6\times\dfrac{1}{a^8b^8}=ab$

$=4^3\times27^2=(2^2)^3\times(3^3)^2=2^6\times3^6=2^n\times3^n$

$\therefore n=6$

15 $ax^3y^2\div\left(-\dfrac{4}{5}x^4y^b\right)^2\times8x^2y^2=\dfrac{15}{2x^3y^2}$에서

$ax^3y^2\div\dfrac{16}{25}x^8y^{2b}\times8x^2y^2=\dfrac{15}{2x^3y^2}$,

$ax^3y^2\times\dfrac{25}{16x^8y^{2b}}\times8x^2y^2=\dfrac{15}{2x^3y^2}$, $\dfrac{25a}{2x^3y^{2b-4}}=\dfrac{15}{2x^3y^2}$

즉, $25a=15,\ 2b-4=2$이므로 $a=\dfrac{3}{5},\ b=3$

$\therefore\ \dfrac{10a^3}{b^2}\times\left(-\dfrac{2}{5}a^2b^2\right)\div\dfrac{a^3b}{2}$

$=\dfrac{10a^3}{b^2}\times\left(-\dfrac{2}{5}a^2b^2\right)\times\dfrac{2}{a^3b}=-\dfrac{8a^2}{b}$

$=-\dfrac{8\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}{3}=-\dfrac{24}{25}$

16 바로 앞의 두 항을 곱한 식이 다음 항이 되는 규칙이다.

$\boxed{A}$, $\boxed{①}$, $\boxed{②}$, $2a$, b, $2ab$, $2ab^2$, $4a^2b^3$, $\boxed{B}$에서

$② \times 2a=b$이므로 $②=\dfrac{b}{2a}$

$①\times\dfrac{b}{2a}=2a$이므로 $①=2a\times\dfrac{2a}{b}=\dfrac{4a^2}{b}$

$A\times\dfrac{4a^2}{b}=\dfrac{b}{2a}$이므로 $A=\dfrac{b}{2a}\times\dfrac{b}{4a^2}=\dfrac{b^2}{8a^3}$

$B=2ab^2\times4a^2b^3=8a^3b^5$

17 (처음 사각기둥의 부피)$=a^2\times b=a^2b$

새로 만든 사각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 $1.1a$이고, 높이는 $0.9b$이므로

(새로 만든 사각기둥의 부피)$=(1.1a)^2\times0.9b$

$=1.21a^2\times0.9b=1.089a^2b$

따라서 $1.089-1=0.089$이므로 처음 사각기둥의 부피에 비하여 8.9 % 증가한다.

18 $x^x:(x^x\times y^x)=(x^y\times y^y):(x^y\times y^5)$이므로

$x^x\times(x^y\times y^5)=(x^x\times y^x)\times(x^y\times y^y)$

$x^{x+y}y^5=x^{x+y}y^{x+y}$

$y^5=y^{x+y}$에서 $x+y=5$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.26~27

01 100	**02** $\frac{255}{2}$	**03** 36	**04** 21	**05** ③
06 11106	**07** (1) $\{F(x)\}^2$ (2) 6 (3) 5			**08** 6 : 1

01 $\frac{10^9-10^8-10^7+10^6-10^5+10^4+10^3-10^2}{9\times 99\times 9999}$

$=\frac{10^8(10-1)-10^6(10-1)-10^4(10-1)+10^2(10-1)}{9\times 99\times 9999}$

$=\frac{9\times(10^8-10^6-10^4+10^2)}{9\times 99\times 9999}$

$=\frac{10^8-10^6-10^4+10^2}{99\times 9999}$

$=\frac{10^6(100-1)-10^2(100-1)}{99\times 9999}=\frac{99\times(10^6-10^2)}{99\times 9999}$

$=\frac{10^6-10^2}{9999}=\frac{10^2(10000-1)}{9999}=10^2=100$

02 $\frac{1}{a^{-n}+1}+\frac{1}{a^n+1}=\frac{1}{\frac{1}{a^n}+1}+\frac{1}{a^n+1}=\frac{1}{\frac{a^n+1}{a^n}}+\frac{1}{a^n+1}$

$=\frac{a^n}{a^n+1}+\frac{1}{a^n+1}=\frac{a^n+1}{a^n+1}=1$

$\therefore$ (주어진 식)

$=5\left\{\left(\frac{1}{25^{-25}+1}+\frac{1}{25^{25}+1}\right)+\left(\frac{1}{25^{-24}+1}+\frac{1}{25^{24}+1}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{25^{-1}+1}+\frac{1}{25^{1}+1}\right)+\frac{1}{25^0+1}\right\}$

$=5\times\left(1\times 25+\frac{1}{2}\right)=\frac{255}{2}$

03 $2^{n-2}+2^{n-1}=2^{n-2}+2\times 2^{n-2}=3\times 2^{n-2}$

$3^n+3^{n+2}=3^n+3^2\times 3^n=10\times 3^n$

$\therefore\ 4\times 5^{n-1}\times(2^{n-2}+2^{n-1})\times(3^n+3^{n+2})$

$=2^2\times 5^{n-1}\times(3\times 2^{n-2})\times(10\times 3^n)$

$=2^2\times 5^{n-1}\times 3\times 2^{n-2}\times(2\times 5)\times 3^n$

$=2^{n+1}\times 3^{n+1}\times 5^n=6^{n+1}\times 5^n$

$=6\times 6^n\times 5^n=6\times 30^n$

따라서 a가 최소가 될 때 $a=6$, $b=30$이므로 $a+b=36$

04 좌변의 모든 항을 3의 거듭제곱으로 나타내면

$3^{777}+27^{259}+(3^{37})^n$

$=3^{777}+(3^3)^{259}+3^{37n}=3^{777}+3^{777}+3^{37n}$

$=2\times 3^{777}+3^{37n}$

즉, $2\times 3^{777}+3^{37n}=3^{778}$이다.

$2\times 3^{777}+3^{37n}=3\times 3^{777}$

$3^{37n}=3^{777}$에서 $37n=777$ $\quad\therefore n=21$

05 10을 7로 나눈 나머지는 3이므로 10^{36}을 7로 나눈 나머지는 $3^{36}=(3^2)^{18}=9^{18}$을 7로 나눈 나머지와 같다.

또 9를 7로 나눈 나머지는 2이므로 9^{18}을 7로 나눈 나머지는 $2^{18}=(2^3)^6=8^6$을 7로 나눈 나머지와 같다.

또 8을 7로 나눈 나머지는 1이므로 8^6을 7로 나눈 나머지는 1^6을 7로 나눈 나머지와 같다.

따라서 10^{36}을 7로 나눈 나머지는 1이므로 5월 18일 화요일로부터 10^{36}일 후는 수요일이다.

06 예를 들어 $f(125)=125-10\left[\frac{125}{10}\right]=125-10\times 12=5$,

$f(79)=79-10\left[\frac{79}{10}\right]=79-10\times 7=9$

이므로 x가 자연수일 때, 함수 $f(x)$는 x의 일의 자리의 숫자이다.

이때 2의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6의 순서로 반복되고, $2222=4\times 555+2$이므로

$f(2)+f(2^2)+f(2^3)+\cdots+f(2^{2221})+f(2^{2222})$

$=(2+4+8+6)\times 555+2+4=11106$

07 (1) $F(2x)=a^{2x}b^{2\times 2x}=a^{2x}b^{4x}=(a^xb^{2x})^2=\{F(x)\}^2$

(2) $F(x)\times F(2x)\times F(3x)$

$=a^xb^{2x}\times a^{2x}b^{4x}\times a^{3x}b^{6x}$

$=a^{x+2x+3x}b^{2x+4x+6x}$

$=a^{6x}b^{12x}=a^{6x}b^{2\times 6x}$

$=F(6x)$

$\therefore\ k=6$

[다른 풀이]

(1)에서 $F(2x)=\{F(x)\}^2$이고,

$F(3x)=a^{3x}b^{2\times 3x}=a^{3x}b^{6x}=(a^xb^{2x})^3=\{F(x)\}^3$이므로

$F(nx)=\{F(x)\}^n$임을 알 수 있다.

$\therefore\ F(x)\times F(2x)\times F(3x)$

$=F(x)\times\{F(x)\}^2\times\{F(x)\}^3$

$=\{F(x)\}^6=F(6x)$

따라서 $k=6$이다.

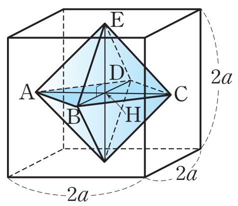
(3) $F(2x+3)=a^{2x+3}b^{2\times(2x+3)}=a^{2x+3}b^{4x+6}$

$=a^3b^6\times a^{2x}b^{4x}=a^3b^{2\times 3}\times(a^xb^{2x})^2$

$=F(3)\times\{F(x)\}^2$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로 $p+q=5$

08 정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$라 하면 오른쪽 그림에서 정사각형 ABCD의 한 대각선의 길이가 $2a$이다.



즉, $\overline{AC}=\overline{BD}=2a$이므로

$\overline{AH}=\overline{BH}=\overline{EH}=a$

$\therefore$ (사각형 ABCD의 넓이)

$=4\triangle ABH=4\times\left(\frac{1}{2}\times a\times a\right)=2a^2$

이때 정팔면체는 정사각뿔 2개의 밑면을 맞붙여 놓은 모양이므로 정팔면체의 부피 V는

$V=2\times$(정사각뿔 E-ABCD의 부피)

$=2\times\left\{\frac{1}{3}\times(\text{사각형 ABCD의 넓이})\times\overline{EH}\right\}$

$=2\times\frac{1}{3}\times 2a^2\times a=\frac{4}{3}a^3$

따라서 정육면체와 정팔면체의 부피의 비는

$(2a)^3:\frac{4}{3}a^3=8a^3:\frac{4}{3}a^3=6:1$

3 다항식의 계산

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.31~37

1-1 (1) $a-b$ (2) $-12x^2-1$ **1-2** $-\frac{1}{4}$
1-3 $2x^2+5x-11$ **1-4** $4y$
2-1 -108 **2-2** $(1+2y)$배 **2-3** $-7xy-4y$
3-1 $6x^3+2x^2-4x$ **3-2** ③ **3-3** 4 **3-4** -16
4-1 930 **4-2** $a=16$, $b=512$, $c=8$, $d=16$
4-3 -1 **4-4** ③, ④
5-1 (1) $9a^2+b^2+4c^2-6ab-4bc+12ca$
(2) $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$
(3) $-x^3+8y^3$
5-2 (1) $x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$ (2) a^6-b^6
6-1 (1) $-x^2-y^2+2xy+x-y+6$
(2) $a^2-b^2+c^2-d^2+2ac-2bd$
6-2 4
6-3 (1) $x^4-4x^3+x^2+6x$
(2) $x^4+15x^3+80x^2+180x+144$
(3) $9x^4-30x^3-47x^2+120x+44$
7-1 (1) 141 (2) 100000000 **7-2** 22 **7-3** ③
7-4 x^2+4 **7-5** $-2x^2+7xy-6y^2$
8-1 $\frac{1}{6}$ **8-2** 194 **8-3** -1 **8-4** 80
9-1 34 **9-2** ④ **9-3** 2
10-1 $2x-1$ **10-2** $18x^2+6x-39$ **10-3** 11
11-1 ② **11-2** ⑤ **11-3** $x=\frac{by+b}{ay-a}$
12-1 ② **12-2** $\frac{1}{6}$ **12-3** ⑤ **12-4** -1 **12-5** -1
13-1 2 **13-2** $\frac{31}{5}$ **13-3** 0
14-1 (1) $V=(ab-\pi r^2)h$ (2) $h=\frac{V}{ab-\pi r^2}$
14-2 $c=\frac{a+2b}{3}$ **14-3** $V_2=\frac{3}{4}V_1$

1-1 (1) $\frac{2a-b}{3}+\frac{2a-7b}{15}-\frac{b-a}{5}$
$=\frac{5(2a-b)+(2a-7b)-3(b-a)}{15}$
$=\frac{10a-5b+2a-7b-3b+3a}{15}$
$=\frac{15a-15b}{15}$
$=a-b$
(2) $[5-3x-3\{2x^2-(3x-2x^2)+3\}]-6x+3$
$=\{5-3x-3(2x^2-3x+2x^2+3)\}-6x+3$
$=\{5-3x-3(4x^2-3x+3)\}-6x+3$
$=(5-3x-12x^2+9x-9)-6x+3$
$=(-12x^2+6x-4)-6x+3$
$=-12x^2-1$

1-2 (평균)
$=\frac{(x^2-3x)+(-3x^2+2x+4)+(4x-2)+(-x^2-3x)}{4}$
$=\frac{-3x^2+2}{4}=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}$
즉, $-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}=ax^2+bx+c$
따라서 $a=-\frac{3}{4}$, $b=0$, $c=\frac{1}{2}$이므로
$a+b+c=-\frac{1}{4}$

1-3 $2x^2-5x+1+A=5x^2-x-3$이므로
$A=5x^2-x-3-(2x^2-5x+1)$
$=5x^2-x-3-2x^2+5x-1$
$=3x^2+4x-4$
$-3x^2+x-6-B=-2x^2+1$이므로
$B=-3x^2+x-6-(-2x^2+1)$
$=-3x^2+x-6+2x^2-1$
$=-x^2+x-7$
$\therefore$ $A+B=3x^2+4x-4+(-x^2+x-7)$
$=2x^2+5x-11$

1-4 자연수 n에 대하여 $2n+1$, $2n-1$은 홀수이고 $2n$은 짝수이므로
$(-1)^{2n+1}=-1$, $(-1)^{2n}=1$, $(-1)^{2n-1}=-1$
$\therefore$ $(-1)^{2n+1}(2x-y)+(-1)^{2n}(x+2y)$
$-(-1)^{2n-1}(x+y)$
$=-(2x-y)+(x+2y)+(x+y)$
$=4y$

2-1 $\left(\frac{4}{3}a^3b^2-2a^4b\right)\div\left(-\frac{2}{3}ab\right)-\left(3ab-\frac{9}{2}a^2\right)\times\frac{5}{6}a$
$=\left(\frac{4}{3}a^3b^2-2a^4b\right)\times\left(-\frac{3}{2ab}\right)-3ab\times\frac{5}{6}a+\frac{9}{2}a^2\times\frac{5}{6}a$
$=\frac{4}{3}a^3b^2\times\left(-\frac{3}{2ab}\right)+2a^4b\times\frac{3}{2ab}-\frac{5}{2}a^2b+\frac{15}{4}a^3$
$=-2a^2b+3a^3-\frac{5}{2}a^2b+\frac{15}{4}a^3$
$=-\frac{9}{2}a^2b+\frac{27}{4}a^3$
$a=-2$, $b=3$이므로
$-\frac{9}{2}a^2b+\frac{27}{4}a^3=-\frac{9}{2}\times(-2)^2\times3+\frac{27}{4}\times(-2)^3$
$=-54-54$
$=-108$

2-2 (사다리꼴의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(x^2y+2x^2y^2)\times xy^2$
$=\frac{1}{2}x^3y^3+x^3y^4$
(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times xy^2\times x^2y=\frac{1}{2}x^3y^3$

(사다리꼴의 넓이)÷(삼각형의 넓이)

$=\left(\frac{1}{2}x^3y^3+x^3y^4\right)\div\frac{1}{2}x^3y^3$

$=\left(\frac{1}{2}x^3y^3+x^3y^4\right)\times\frac{2}{x^3y^3}$

$=1+2y$

즉, 사다리꼴의 넓이는 삼각형의 넓이의 $(1+2y)$배이다.

2-3 $(2x-1,\ -3y,\ 2xy)\circ(y,\ x+1,\ -3)$

$=(2x-1)\times y+(-3y)\times(x+1)+2xy\times(-3)$

$=2xy-y-3xy-3y-6xy$

$=-7xy-4y$

3-1 (직육면체의 부피)$=2x(x+1)(3x-2)$

$=(2x^2+2x)(3x-2)$

$=6x^3-4x^2+6x^2-4x$

$=6x^3+2x^2-4x$

3-2 $(x-2y+3z)(x-2y+3z)(x-2y+3z)$에서 xyz항은

$x\times(-2y)\times3z+x\times3z\times(-2y)+(-2y)\times x\times3z$

$+(-2y)\times3z\times x+3z\times x\times(-2y)+3z\times(-2y)\times x$

$=-6xyz-6xyz-6xyz-6xyz-6xyz-6xyz$

$=-36xyz$

따라서 xyz항의 계수는 -36이다.

3-3 a를 6으로 나눈 몫을 p, b를 9로 나눈 몫을 q라 하면

$a=6p+2,\ b=9q+8$에서

$ab=(6p+2)(9q+8)$

$=54pq+48p+18q+16$

$=6(9pq+8p+3q+2)+4$

따라서 ab를 6으로 나눈 나머지는 4이다.

3-4 주어진 식에 $x=1,\ y=1$을 대입하면

$(1+3-1)^2(-3+a+5)=9(a+2)=9a+18$

이때 상수항은 $(-1)^2\times5=5$이고 상수항을 제외한 계수의 총합은 22이므로

$(9a+18)-5=22$

$\therefore\ a=1$

즉, $(x+3y-1)(x+3y-1)(-3x+y+5)$에서 x^2y항은

$x\times x\times y+x\times3y\times(-3x)+3y\times x\times(-3x)$

$=x^2y-9x^2y-9x^2y=-17x^2y$

$\therefore\ b=-17$

$\therefore\ a+b=-16$

4-1 $(2x-3)(2x+3)-3(x+2)^2+(3x+5)(3x-2)$

$=4x^2-9-3(x^2+4x+4)+9x^2+9x-10$

$=4x^2-9-3x^2-12x-12+9x^2+9x-10$

$=10x^2-3x-31$

따라서 $A=10,\ B=-3,\ C=-31$이므로

$ABC=930$

4-2 $(x-2)^2(x+2)^2(x^2+4)^2(x^4+16)^2$

$=\{(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)\}^2$

$=\{(x^2-4)(x^2+4)(x^4+16)\}^2$

$=\{(x^4-16)(x^4+16)\}^2$

$=(x^8-256)^2$

$=x^{16}-512x^8+256^2$

$=x^{16}-512x^8+2^{16}$

$=x^a-b\times x^c+2^d$

$\therefore\ a=16,\ b=512,\ c=8,\ d=16$

4-3 x항의 계수는

$3\times2a+\{4\times2+(-b)\times(-1)\}=6a+8+b$

$6a+8+b=16$에서 $6a+b=8$

이때 $a,\ b$는 자연수이므로 $a=1,\ b=2$

따라서 상수항은 $3a^2-2b=3\times1^2-2\times2=-1$

4-4 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$에서

$ac=3$이므로 $a=1,\ c=3$ 또는 $a=3,\ c=1$

$bd=2$이므로 $b=1,\ d=2$ 또는 $b=2,\ d=1$

따라서 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$는

$(1,\ 1,\ 3,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1,\ 1)$

이므로 A의 값은 5 또는 7이다.

5-1 (1) $(3a-b+2c)^2=9a^2+b^2+4c^2-6ab-4bc+12ca$

(2) $(2x-3y)^3$

$=(2x)^3-3\times(2x)^2\times3y+3\times2x\times(3y)^2-(3y)^3$

$=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

(3) $(-x+2y)(x^2+2xy+4y^2)$

$=(-x+2y)\{(-x)^2-(-x)\times2y+(2y)^2\}$

$=(-x)^3+(2y)^3=-x^3+8y^3$

5-2 (1) $(x+y)^3(x-y)^3$

$=\{(x+y)(x-y)\}^3$

$=(x^2-y^2)^3$

$=x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6$

(2) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

$=\{(a+b)(a^2-ab+b^2)\}\{(a-b)(a^2+ab+b^2)\}$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

6-1 (1) $(3-x+y)(2+x-y)=\{3-(x-y)\}\{2+(x-y)\}$

에서 $x-y=A$로 치환하면

$(3-A)(2+A)$

$=6+A-A^2$

$=6+(x-y)-(x-y)^2$

$=-x^2-y^2+2xy+x-y+6$

(2) $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

$=\{(a+c)+(b+d)\}\{(a+c)-(b+d)\}$

에서 $a+c=A,\ b+d=B$로 치환하면

$(A+B)(A-B)$

$=A^2-B^2$

$=(a+c)^2-(b+d)^2$

$=a^2-b^2+c^2-d^2+2ac-2bd$

6-2 $\{(a+b)^n+(a-b)^n\}^2-\{(a+b)^n-(a-b)^n\}^2$에서

$(a+b)^n=A$, $(a-b)^n=B$로 치환하면

$(A+B)^2-(A-B)^2$

$=(A^2+2AB+B^2)-(A^2-2AB+B^2)$

$=4AB$

$=4(a+b)^n(a-b)^n$

$=4\{(a+b)(a-b)\}^n$

$=4(a^2-b^2)^n$

이때 $a^2-b^2=1$이므로

$4(a^2-b^2)^n=4\times1^n=4$

6-3 (1) $x(x+1)(x-2)(x-3)$

$=\{x(x-2)\}\{(x+1)(x-3)\}$

$=(x^2-2x)(x^2-2x-3)$

에서 $x^2-2x=A$로 치환하면

$A(A-3)=A^2-3A$

$=(x^2-2x)^2-3(x^2-2x)$

$=x^4-4x^3+4x^2-3x^2+6x$

$=x^4-4x^3+x^2+6x$

(2) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+6)$

$=\{(x+2)(x+6)\}\{(x+3)(x+4)\}$

$=(x^2+8x+12)(x^2+7x+12)$

에서 $x^2+12=A$로 치환하면

$(A+8x)(A+7x)$

$=A^2+15Ax+56x^2$

$=(x^2+12)^2+15x(x^2+12)+56x^2$

$=x^4+24x^2+144+15x^3+180x+56x^2$

$=x^4+15x^3+80x^2+180x+144$

(3) $(x-2)(3x+1)(x+2)(3x-11)$

$=\{(x-2)(3x+1)\}\{(x+2)(3x-11)\}$

$=(3x^2-5x-2)(3x^2-5x-22)$

에서 $3x^2-5x=A$로 치환하면

$(A-2)(A-22)$

$=A^2-24A+44$

$=(3x^2-5x)^2-24(3x^2-5x)+44$

$=9x^4-30x^3+25x^2-72x^2+120x+44$

$=9x^4-30x^3-47x^2+120x+44$

7-1 (1) $150=a$로 치환하면

$151\times151-149\times152-149\times150+146\times153$

$=(a+1)^2-(a-1)(a+2)-(a-1)a+(a-4)(a+3)$

$=a^2+2a+1-(a^2+a-2)-(a^2-a)+(a^2-a-12)$

$=a-9$

$=150-9=141$

(2) $100=a$로 치환하면

$11\times909\times10001+1$

$=99\times101\times10001+1$

$=(a-1)(a+1)(a^2+1)+1$

$=(a^2-1)(a^2+1)+1$

$=a^4-1+1=a^4$

$=100^4$

$=100000000$

7-2 $799^2=(800-1)^2=800^2-2\times800+1^2$

$=640000-1600+1=638401$

따라서 각 자리의 숫자의 합은

$6+3+8+4+0+1=22$

7-3 $13-12=1$이므로 주어진 식에 $(13-12)$를 곱하여 곱셈 공식을 이용한다.

$(13+12)(13^2+12^2)(13^4+12^4)$

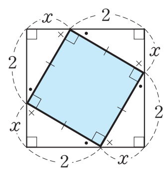
$=(13-12)(13+12)(13^2+12^2)(13^4+12^4)$

$=(13^2-12^2)(13^2+12^2)(13^4+12^4)$

$=(13^4-12^4)(13^4+12^4)$

$=13^8-12^8$

7-4 오른쪽 그림에서 4개의 직각삼각형은 합동이고, 색칠한 사각형의 넓이는 큰 정사각형의 넓이에서 직각삼각형 4개의 넓이를 뺀 것과 같다.

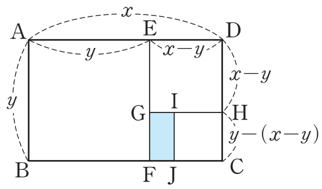


$\therefore$ (색칠한 사각형의 넓이)

$=(x+2)^2-4\times\left(\frac{1}{2}\times2\times x\right)$

$=x^2+4x+4-4x=x^2+4$

7-5 다음 그림에서 세 사각형 ABFE, EGHD, IJCH는 한 변의 길이가 각각 y, $x-y$, $y-(x-y)$인 정사각형이다.



$\therefore$ (사각형 GFJI의 넓이)

$=$(직사각형 ABCD의 넓이)

$-$(세 정사각형 ABFE, EGHD, IJCH의 넓이의 합)

$=xy-[y^2+(x-y)^2+\{y-(x-y)\}^2]$

$=xy-\{y^2+x^2-2xy+y^2+(2y-x)^2\}$

$=xy-(x^2-2xy+2y^2+4y^2-4xy+x^2)$

$=xy-(2x^2-6xy+6y^2)$

$=-2x^2+7xy-6y^2$

8-1 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$13=(-1)^2-2xy \qquad \therefore\ xy=-6$

$\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{6}$

8-2 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=4^2-2=14$

$\therefore\ x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=14^2-2=194$

8-3 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로

$6=2^2-2(ab+bc+ca) \qquad \therefore\ ab+bc+ca=-1$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{-1}{abc}$

이때 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$이므로 $\frac{-1}{abc}=1 \qquad \therefore\ abc=-1$

8-4 $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$이므로

$4xy=12 \quad \therefore xy=3$

$(x-5)(y-5)=xy-5(x+y)+25$

$=3-5(x+y)+25$

$=28-5(x+y)$

이므로 $28-5(x+y)=3 \quad \therefore x+y=5$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=5^3-3\times3\times5=80$

9-1 $x\neq0$이므로 $x^2+6x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+6+\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\dfrac{1}{x}=-6$

$\therefore x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=(-6)^2-2=34$

9-2 $x\neq0$이므로 $x^2-4x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4-\dfrac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\dfrac{1}{x}=4$

$\therefore x^3+2x-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}$

$=x^3-\dfrac{1}{x^3}+2x-\dfrac{2}{x}$

$=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+5\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$=4^3+5\times4=84$

9-3 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x^3-1=0 \quad \therefore x^3=1$

$\therefore x^9+\dfrac{1}{x^9}=(x^3)^3+\dfrac{1}{(x^3)^3}=1^3+\dfrac{1}{1^3}=2$

10-1 $y-4+2(-5x+y)=y-4-10x+2y$

$=-10x+3y-4$

$=-10x+3(4x+1)-4$

$=-10x+12x+3-4$

$=2x-1$

10-2 $A=\dfrac{3x^3+6x^2-9x}{3x}=x^2+2x-3$,

$B=(2x^3+4x^2-8x)\div(-2x)=-x^2-2x+4$이므로

$2A-[3B-4C-\{A-2(B-3C)\}]$

$=2A-\{3B-4C-(A-2B+6C)\}$

$=2A-(-A+5B-10C)$

$=3A-5B+10C$

$=3(x^2+2x-3)-5(-x^2-2x+4)+10(x^2-x-1)$

$=3x^2+6x-9+5x^2+10x-20+10x^2-10x-10$

$=18x^2+6x-39$

10-3 $2x-y+3=0$에서 $y=2x+3$

$z=\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x+2x+3}{2}=\dfrac{3x+3}{2}$

$\therefore y+2z=2x+3+3x+3=5x+6$

따라서 $a=5$, $b=6$이므로 $a+b=11$

11-1 $\dfrac{2}{b}=\dfrac{3}{c}-\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{2}{b}=\dfrac{3a-c}{ac}$

$b(3a-c)=2ac \quad \therefore b=\dfrac{2ac}{3a-c}$

11-2 주어진 등식을 각각 S에 관하여 풀면

① $S=a(1+rn) \quad \therefore S=a+arn$

② $\dfrac{S}{an}=r+\dfrac{1}{n}$, $S=an\left(r+\dfrac{1}{n}\right) \quad \therefore S=a+arn$

③ $S=a+arn$

④ $S-a=arn \quad \therefore S=a+arn$

⑤ $\dfrac{S}{a}=n+\dfrac{1}{r}$, $S=a\left(n+\dfrac{1}{r}\right) \quad \therefore S=an+\dfrac{a}{r}$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

11-3 $y(ax-b)=ax+b$, $axy-by=ax+b$

$axy-ax=by+b$, $x(ay-a)=by+b$

$\therefore x=\dfrac{by+b}{ay-a}$

12-1 $a=1-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-1}{b}$ $\cdots$ ㉠

$\dfrac{1}{c}=1-b$에서 $c=\dfrac{1}{1-b}=-\dfrac{1}{b-1}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 각각 abc에 대입하면

$abc=\dfrac{b-1}{b}\times b\times\left(-\dfrac{1}{b-1}\right)=-1$

12-2 $\dfrac{3x-2y}{5}=\dfrac{x+2y}{2}$에서 $2(3x-2y)=5(x+2y)$

$6x-4y=5x+10y \quad \therefore x=14y$

$\therefore \dfrac{x-3y}{5x-4y}=\dfrac{14y-3y}{70y-4y}=\dfrac{11y}{66y}=\dfrac{1}{6}$

12-3 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$에서 $\dfrac{a+b}{ab}=2 \quad \therefore a+b=2ab$

$\therefore \dfrac{5a-2ab+5b}{a+b}=\dfrac{5(a+b)-2ab}{a+b}$

$=\dfrac{10ab-2ab}{2ab}=\dfrac{8ab}{2ab}=4$

12-4 $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+\dfrac{a+c}{a}+\dfrac{b+c}{b}$

$=\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a+c}{a}+\dfrac{b+c}{b}$

$=\dfrac{a+b+c}{a}+\dfrac{a+b+c}{b}+\dfrac{a+b}{c}$

이때 $a+b+c=0$이므로 $a+b=-c$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{0}{a}+\dfrac{0}{b}+\dfrac{-c}{c}=-1$

12-5 $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}=1$에서 $\dfrac{y+1+x+1}{(x+1)(y+1)}=1$

$x+y+2=xy+x+y+1 \qquad \therefore\ xy=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}&=\frac{y-1+x-1}{(x-1)(y-1)}\\&=\frac{x+y-2}{xy-x-y+1}\\&=\frac{x+y-2}{2-x-y}\\&=\frac{x+y-2}{-(x+y-2)}=-1\end{aligned}$$

13-1 $a=k,\ b=2k,\ c=5k\ (k\neq 0)$라 하면

$$\begin{aligned}&(3a+b)^2\times ab^2\div ab(-2c)^2\div\frac{b}{8}\\&=(9a^2+6ab+b^2)\times ab^2\div 4abc^2\div\frac{b}{8}\\&=(9a^2+6ab+b^2)\times ab^2\times\frac{1}{4abc^2}\times\frac{8}{b}\\&=(9a^2+6ab+b^2)\times\frac{2}{c^2}\\&=(9k^2+12k^2+4k^2)\times\frac{2}{25k^2}\\&=25k^2\times\frac{2}{25k^2}=2\end{aligned}$$

13-2 $2x-3y=3(5x-4y)$이므로

$2x-3y=15x-12y,\ 9y=13x \qquad \therefore\ y=\dfrac{13}{9}x$

$$\therefore\ \frac{2x+y}{2x-y}=\frac{2x+\frac{13}{9}x}{2x-\frac{13}{9}x}=\frac{\frac{31}{9}x}{\frac{5}{9}x}=\frac{31}{5}$$

13-3 $a:b:c=x:y:z$이므로

$a=xk,\ b=yk,\ c=zk\ (k\neq 0)$라 하면

$$\begin{aligned}&x(b-c)+y(c-a)+z(a-b)\\&=x(yk-zk)+y(zk-xk)+z(xk-yk)\\&=xyk-xzk+yzk-xyk+xzk-yzk=0\end{aligned}$$

14-1 (1) $V=$(직육면체의 부피)$-$(원기둥의 부피)

$\qquad =abh-\pi r^2h=(ab-\pi r^2)h$

(2) (1)의 식을 h에 관하여 풀면 $h=\dfrac{V}{ab-\pi r^2}$

14-2 농도가 $a\,\%$인 소금물의 양을 x g이라 하면

농도가 $b\,\%$인 소금물의 양은 $2x$ g이고, 농도가 $c\,\%$인 소금물의 양은 $3x$ g이다.

이때 소금물을 섞기 전후의 소금의 양은 변하지 않으므로

$\dfrac{a}{100}\times x+\dfrac{b}{100}\times 2x=\dfrac{c}{100}\times 3x$

$ax+2bx=3cx$

$x>0$이므로 위의 식의 양변을 x로 나누면

$a+2b=3c \qquad \therefore\ c=\dfrac{a+2b}{3}$

14-3 $\overline{AD}=a,\ \overline{AB}=b$라 하면 $\overline{FG}=\dfrac{3}{2}a,\ \overline{EF}=b$이므로

$V_1=(\pi\times a^2)\times b=a^2b\pi$

$V_2=\dfrac{1}{3}\pi\times\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2\times b=\dfrac{3}{4}a^2b\pi$

$\therefore\ V_2=\dfrac{3}{4}V_1$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.38~41

01 -1	**02** $3x^2+4y^2$	**03** $\dfrac{15}{4}\pi a^2$	
04 $A=48,\ B=42$	**05** 4	**06** $4a^2+4b^2+4c^2$	**07** 33
08 2000000	**09** 602	**10** -123 **11** -7	**12** 72
13 3	**14** ②	**15** ②	**16** $\dfrac{A^2-2A}{A^2-2A+2}$
17 $a=\dfrac{1}{1-b}$	**18** $x=\dfrac{y+z}{yz-1}$	**19** ②	
20 $\dfrac{175}{76}$	**21** -3	**22** ⑤	**23** $r=\dfrac{p-q}{10}$
24 $H=4a^2b$	**25** $y=-\dfrac{3}{100}x+13$		

01
$$\begin{aligned}(A*B)*B&=(A+kB)*B\\&=(A+kB)+kB\\&=A+2kB\\&=(x^2+3x-4)+2k(x^2+5x+2)\\&=(x^2+3x-4)+(2kx^2+10kx+4k)\\&=(2k+1)x^2+(10k+3)x+(4k-4)\end{aligned}$$

$(2k+1)x^2+(10k+3)x+(4k-4)=-x^2-7x-8$에서

$2k+1=-1,\ 10k+3=-7,\ 4k-4=-8$

$\therefore\ k=-1$

02 $\begin{vmatrix}3x-2y & -(x+2y)\\ 3x & -2y\end{vmatrix}$

$=(3x-2y)\times(-2y)-\{-(x+2y)\times 3x\}$

$=-6xy+4y^2+3x^2+6xy=3x^2+4y^2$

03 색칠한 각 부분은 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴이다.

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$=2\times\left(\pi a^2\times\dfrac{1}{4}\right)+\pi\times(2a)^2\times\dfrac{1}{4}+\pi\times(3a)^2\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\pi a^2+\pi a^2+\dfrac{9}{4}\pi a^2=\dfrac{15}{4}\pi a^2$

04 0 또는 한 자리의 자연수 $a,\ b$에 대하여

$A=40+a,\ B=40+b$라 하면

$C=10a+4,\ D=10b+4$이다.

$AB=CD$이므로

$(40+a)(40+b)=(10a+4)(10b+4)$

즉, $1600+40(a+b)+ab=100ab+40(a+b)+16$

따라서 $ab=16$이고 $a>b$이므로 $a=8,\ b=2$

$\therefore\ A=48,\ B=42$

05 $(x^3+ax^2+2)(x^2+x+b)$의 전개식에서
x^2항은 $ax^2\times b+2x^2$이므로 계수는 $ab+2$
즉, $ab+2=1$에서 $ab=-1$이다.
x^3항은 $x^3\times b+ax^2\times x$이므로 계수는 $a+b$
즉, $a+b=1$이다.
$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=1^3-3\times(-1)\times1=4$

06 $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$
$+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$
$+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$
$=4a^2+4b^2+4c^2$

07 $f(1)f(2)f(4)f(8)$
$$=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^8}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{16}}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\times\frac{3^{16}-1}{3^{16}}=\frac{3^{16}-1}{2\times3^{15}}$$
$\therefore\ a=16,\ b=2,\ c=15$
$\therefore\ a+b+c=33$

08 $98\times(2^4\times5^4+2^3\times5^2+2^2)+102\times(2^4\times5^4-2^3\times5^2+2^2)$
$=(100-2)(100^2+2\times100+2^2)$
$+(100+2)(100^2-2\times100+2^2)$
에서 $100=a$로 치환하면
$(a-2)(a^2+2a+2^2)+(a+2)(a^2-2a+2^2)$
$=(a^3-2^3)+(a^3+2^3)=2a^3$
$=2\times100^3=2000000$

09 $x,\ y,\ z$가 연속하는 세 자연수이므로 $z-x=2$이다.
$x^2+z^2=(z-x)^2+2xz$에서
$202=2^2+2xz\qquad\therefore\ xz=99$
$\therefore\ z^3-x^3=(z-x)^3+3zx(z-x)$
$=2^3+3\times99\times2=602$
[다른 풀이]
$x,\ y,\ z$가 연속하는 세 자연수이고 $x<y<z$이므로
$x=y-1,\ z=y+1$이다.
$x^2+z^2=202$에서 $(y-1)^2+(y+1)^2=202$
$2y^2+2=202,\ y^2=100\qquad\therefore\ y=10$ ($\because$ y는 자연수)
따라서 $x=9,\ z=11$이므로
$z^3-x^3=11^3-9^3=602$

10 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(-3)^2-2\times1=7$
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=(-3)^3-3\times1\times(-3)=-18$
$(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^5+a^2b^3+a^3b^2+b^5$
$=a^5+a^2b^2(a+b)+b^5$
$\therefore\ a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-a^2b^2(a+b)$
$=7\times(-18)-1^2\times(-3)=-123$

11 $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{1}{2}$
$abc=2$이므로 $a+b+c=1$
즉, $a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$이다.
$\therefore\ (a+b)(b+c)(c+a)$
$=(1-c)(1-a)(1-b)$
$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$
$=1-1+(-5)-2=-7$

12 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=3^2-2\times(-6)=21$
$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$
이므로
$3\times\{21-(-6)\}=a^3+b^3+c^3-3\times(-3)$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3=72$

13 $\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a-b}$에서 $(a+b)(a-b)=ab$
$\therefore\ a^2-b^2=ab$
$a>0,\ b>0$이므로 양변을 ab로 나누면
$\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=1\qquad\therefore\ \dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}=-1$
$\therefore\ \dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}=\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right)^2+2$
$=(-1)^2+2=3$

14 $x-1+\dfrac{1}{x}=0$의 양변에 x를 곱하면
$x^2-x+1=0$
위의 식의 양변에 $x+1$을 곱하면
$(x+1)(x^2-x+1)=0,\ x^3+1=0$
$\therefore\ x^3=-1$
$\therefore\ x^3+x^6+x^9=x^3+(x^3)^2+(x^3)^3$
$=-1+(-1)^2+(-1)^3=-1$

15 $x\neq0$이므로 $2x^2-6x+1=0$의 양변을 $2x$로 나누면
$x-3+\dfrac{1}{2x}=0\qquad\therefore\ x+\dfrac{1}{2x}=3$
$x^2+\dfrac{1}{4x^2}=\left(x+\dfrac{1}{2x}\right)^2-2\times x\times\dfrac{1}{2x}$
$=3^2-1=8$
$\therefore\ x^4+\dfrac{1}{16x^4}=\left(x^2+\dfrac{1}{4x^2}\right)^2-2\times x^2\times\dfrac{1}{4x^2}$
$=8^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{127}{2}$

16 $A=x^2+1$에서 $x^2=A-1$

$$\therefore \frac{x^2-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{x^4-1}{x^2}}{\frac{x^4+1}{x^2}}=\frac{x^4-1}{x^4+1}=\frac{(x^2)^2-1}{(x^2)^2+1}$$
$$=\frac{(A-1)^2-1}{(A-1)^2+1}=\frac{A^2-2A}{A^2-2A+2}$$

17 $b=\dfrac{1}{\frac{-a}{1-a}}=\dfrac{a-1}{a}$에서 $ab=a-1$

$a-ab=1$, $a(1-b)=1$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{1-b}$

18 $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{x+y+z}{xyz}$이므로

$\dfrac{x+y+z}{xyz}=1$에서 $x+y+z=xyz$, $xyz-x=y+z$

$x(yz-1)=y+z$ $\quad\therefore x=\dfrac{y+z}{yz-1}$

19 $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{x+2y+1}{(x+1)y}$이므로 $\dfrac{x+2y+1}{xy+y}=1$에서

$x+2y+1=xy+y$ $\quad\therefore xy=x+y+1$

$$\therefore \frac{2x+2y+1}{xy+x+y}=\frac{2x+2y+1}{(x+y+1)+x+y}$$
$$=\frac{2x+2y+1}{2x+2y+1}=1$$

20 $2x=3y=5z$에서 2, 3, 5의 최소공배수는 30이므로

$2x=3y=5z=30k\ (k\neq0)$라 하면

$x=15k$, $y=10k$, $z=6k$

$$\therefore \frac{x^2-xy+y^2}{y^2-yz+z^2}=\frac{225k^2-150k^2+100k^2}{100k^2-60k^2+36k^2}$$
$$=\frac{175k^2}{76k^2}=\frac{175}{76}$$

21 $\dfrac{bc+ca}{ab}+\dfrac{ca+ab}{bc}+\dfrac{ab+bc}{ca}$

$$=\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{a}\right)$$
$$=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$$
$$=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}\ (\because a+b+c=0)$$
$$=(-1)+(-1)+(-1)=-3$$

22 $a:b=4:3$, $d:b=2:3$에서

$a=\dfrac{4}{3}b$, $b=\dfrac{3}{2}d$이므로 $a=\dfrac{4}{3}b=\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{2}d=2d$

$c:d=3:5$에서 $c=\dfrac{3}{5}d$

$\therefore a:c=2d:\dfrac{3}{5}d=\dfrac{10}{5}d:\dfrac{3}{5}d=10:3$

23 실제 평균은 $\dfrac{12p+8q}{20}$점이므로

$\dfrac{3p+q}{4}-\dfrac{12p+8q}{20}=\dfrac{3}{2}r$

$5(3p+q)-(12p+8q)=30r$, $15p+5q-12p-8q=30r$

$30r=3p-3q$ $\quad\therefore r=\dfrac{p-q}{10}$

24 (사각기둥의 부피)=(밑넓이)×(높이)이므로

$\left\{\dfrac{1}{2}\times(2a+3b)\times h\right\}\times H=4a^3bh+6a^2b^2h$에서

$\dfrac{(2a+3b)h}{2}H=2a^2bh(2a+3b)$

$H=2a^2bh(2a+3b)\times\dfrac{2}{(2a+3b)h}$

$\therefore H=4a^2b$

25 A 그릇의 소금물 $(200-x)$g에 B 그릇의 소금물 xg을 섞었으므로 A 그릇 소금물의 소금의 양은

$\dfrac{13}{100}(200-x)+\dfrac{7}{100}x=\dfrac{y}{100}\times200$

양변에 100을 곱하면

$13(200-x)+7x=200y$

$200y=2600-13x+7x$

$\therefore y=-\dfrac{3}{100}x+13$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.42~43

01 $-80a-90$	**02** 98	**03** 133	**04** -1
05 $x+3y$	**06** $2m$	**07** $\dfrac{1}{d}$	

01 각각의 수들이 나열된 규칙을 찾는다.

$\langle1,\ a\rangle=\langle4,\ a\rangle-3=4a-3$

$\langle2,\ a+1\rangle=\langle4,\ a+1\rangle-2=4(a+1)-2=4a+2$

$\langle3,\ a+2\rangle=\langle4,\ a+2\rangle-1=4(a+2)-1=4a+7$

$\langle4,\ a+3\rangle=4(a+3)=4a+12$

$\therefore \langle1,\ a\rangle\times\langle2,\ a+1\rangle-\langle3,\ a+2\rangle\times\langle4,\ a+3\rangle$

$=(4a-3)(4a+2)-(4a+7)(4a+12)$

$=16a^2-4a-6-(16a^2+76a+84)$

$=-80a-90$

02 주어진 조건의 식에서 x, y의 지수가 1씩 커지므로 $x+y$와의 곱을 생각한다.

$(ax^2+by^2)(x+y)=ax^3+by^3+xy(ax+by)$에서

$10\times1=26+xy\times8$ $\quad\therefore xy=-2$

$(ax^3+by^3)(x+y)=ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)$에서

$26\times1=ax^4+by^4+(-2)\times10$

$\therefore ax^4+by^4=46$

$(ax^4+by^4)(x+y)=ax^5+by^5+xy(ax^3+by^3)$에서

$46\times1=ax^5+by^5+(-2)\times26$

$\therefore ax^5+by^5=98$

03 $xy \neq 0$이므로 $x^2+5xy+y^2=0$의 양변을 xy로 나누면

$$\frac{x}{y}+5+\frac{y}{x}=0 \qquad \therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-5$$

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)^2-2=(-5)^2-2=23$$

$$\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)^3-3\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$$

$$=(-5)^3-3\times(-5)=-110$$

$$\therefore \frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\frac{x^3}{y^3}-\frac{y^3}{x^3}=\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}\right)-\left(\frac{y^3}{x^3}+\frac{x^3}{y^3}\right)$$

$$=23-(-110)=133$$

04 $(x+1)^{n+2}=(x+1)^{n+1}-(x+1)^n$의 양변을 $(x+1)^n$으로 나누면

$(x+1)^2=(x+1)-1$, $x^2+2x+1=x+1-1$

$\therefore x^2+x+1=0$

$x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$

$\therefore x^3=1$

이때 $x \neq 0$이므로 $x^2+x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$$x+1+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=-1$$

$$\therefore x^{101}+\frac{1}{x^{11}}=(x^3)^{33}\times x^2+\frac{1}{(x^3)^3\times x^2}$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$$=(-1)^2-2=-1$$

05 직육면체 A, B, C, D의 부피는 각각 x^3, x^2y, xy^2, y^3이고, 새로 만든 정육면체의 한 모서리의 길이를 $ax+by$라 하면 a, b는 자연수이다. 정육면체의 부피는

$(ax+by)^3=a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3$

이때 직육면체 A는 한 개만 사용했으므로 $a=1$이다.

즉, $(x+by)^3$을 전개한 식의 계수의 합이 64인 b를 구하면 된다.

$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$에서 계수의 합은 8

$(x+2y)^3=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$에서 계수의 합은 27

$(x+3y)^3=x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$에서 계수의 합은 64

이므로 $b=3$이다.

따라서 새로 만든 정육면체의 한 모서리의 길이는 $x+3y$이다.

06

$$A+\frac{(2x_1-A)f_1+(2x_2-A)f_2+\cdots+(2x_n-A)f_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

$$=A+\frac{2x_1f_1-Af_1+2x_2f_2-Af_2+\cdots+2x_nf_n-Af_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

$$=A+\frac{2x_1f_1+2x_2f_2+\cdots+2x_nf_n-A(f_1+f_2+\cdots+f_n)}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

$$=A+\frac{2(x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n)}{f_1+f_2+\cdots+f_n}-A$$

$$=2\times\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}=2m$$

07 $a:b=b:c=c:d$이므로 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k\ (k\neq 0)$라 하면

$a=bk$, $b=ck$, $c=dk$에서

$b=ck=(dk)k=dk^2$, $a=bk=(dk^2)k=dk^3$

$$\therefore \frac{a}{a+b+c+d}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

$$=\frac{1}{a+b+c+d}\left(1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d}\right)$$

$$=\frac{1}{dk^3+dk^2+dk+d}\left(1+\frac{dk^3}{dk^2}+\frac{dk^3}{dk}+\frac{dk^3}{d}\right)$$

$$=\frac{1}{d(k^3+k^2+k+1)}(1+k+k^2+k^3)$$

$$=\frac{1}{d}$$

퍼펙트 **단원 마무리** P.44~47

01 110	**02** ⑤	**03** 567	**04** 5개	**05** 16개
06 0	**07** 135	**08** 2^2, 2^4, 2^6		**09** ④
10 ④	**11** 10	**12** $10x^{10}+8x^8+6x^6+4x^4+2x^2$		
13 ④	**14** 164	**15** -1	**16** ②	**17** 8
18 2	**19** $x^2+2x+2xy+y$		**20** $\frac{b+c+2}{bc-1}$	
21 6 : 4 : 3 : 12		**22** 1	**23** $b=\frac{10}{11}a$	
24 20개				

01 $\frac{4}{13}=0.\dot{3}0769\dot{2}$에서 순환마디의 숫자의 개수는 6개이다.

$60=6\times 10$이므로

$x_1-x_2+x_3-x_4+\cdots+x_{59}-x_{60}$

$=(3-0+7-6+9-2)\times 10$

$=11\times 10=110$

02 기약분수의 분모에 2나 5 이외의 소인수가 있으면 순환소수가 된다.

$\frac{6y}{20x}=\frac{2\times 3\times y}{2^2\times 5\times x}$에서

① $\frac{2\times 3\times 4}{2^2\times 5\times 3}=\frac{2^3\times 3}{2^2\times 3\times 5}=\frac{2}{5}$: 유한소수

② $\frac{2\times 3\times 6}{2^2\times 5\times 9}=\frac{2^2\times 3^2}{2^2\times 3^2\times 5}=\frac{1}{5}$: 유한소수

③ $\frac{2\times 3\times 6}{2^2\times 5\times 12}=\frac{2^2\times 3^2}{2^4\times 3\times 5}=\frac{3}{2^2\times 5}$: 유한소수

④ $\frac{2\times 3\times 15}{2^2\times 5\times 18}=\frac{2\times 3^2\times 5}{2^3\times 3^2\times 5}=\frac{1}{2^2}$: 유한소수

⑤ $\frac{2\times 3\times 12}{2^2\times 5\times 27}=\frac{2^3\times 3^2}{2^2\times 3^3\times 5}=\frac{2}{3\times 5}$: 순환소수

따라서 순환소수가 되는 순서쌍은 ⑤ (27, 12)이다.

03 (나)에서 $\dfrac{A}{630}=\dfrac{A}{2\times5\times3^2\times7}$가 유한소수가 되려면 A는 63의 배수이어야 한다.
(가)에서 A는 홀수이므로 $A=63k$(k는 홀수)의 꼴로 나타낼 수 있다.
(다)에서 $\dfrac{63k}{630}\times40=4k$이고, $4k$는 어떤 자연수의 제곱이므로 $2^2\times k$에서 k는 제곱수이다.
즉, k는 홀수인 제곱수이므로 $k=1,\ 9,\ 25,\ 49,\ 81,\ \cdots$
$k=1$일 때, $A=63\times1=63$
$k=9$일 때, $A=63\times9=567$
$k=25$일 때, $A=63\times25=1575$
$\vdots$
이때 (가)에서 A는 세 자리의 홀수이므로 $A=567$

04 (가), (나), (다)에서 A는 $0.\dot{a}b\dot{c}$($a,\ b,\ c$는 0 또는 한 자리의 자연수)의 꼴이다. 즉, 약분하기 전의 분모가 999이어야 하므로 기약분수의 분모로 가능한 수는 999의 약수이다.
$999=3^3\times37$이므로 999의 약수는 1, 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999이다.
이때 A는 1보다 작은 양수이어야 하므로 분모는 1이 될 수 없고, 분모가 3, 9인 기약분수는 순환마디의 숫자가 1개이므로 조건에 맞지 않는다.
따라서 분모로 가능한 수는 27, 37, 111, 333, 999의 5개이다.

05 $\langle m,\ n\rangle=2\left(\dfrac{m}{9}+\dfrac{n}{9}\right)-\left(\dfrac{10m+n}{99}+\dfrac{10n+m}{99}\right)$
$=\dfrac{2}{9}(m+n)-\left(\dfrac{11m+11n}{99}\right)$
$=\dfrac{2}{9}(m+n)-\dfrac{1}{9}(m+n)$
$=\dfrac{1}{9}(m+n)$
이때 $\langle 2,\ 4\rangle=\dfrac{1}{9}(2+4)=\dfrac{6}{9}$, $\langle 3,\ 5\rangle=\dfrac{1}{9}(3+5)=\dfrac{8}{9}$
이고 $\langle 2,\ 4\rangle\le\langle m,\ n\rangle\le\langle 3,\ 5\rangle$이므로
$\dfrac{6}{9}\le\dfrac{1}{9}(m+n)\le\dfrac{8}{9}$
$\therefore\ 6\le m+n\le8$
이때 m과 n이 서로 다른 자연수이므로 순서쌍 $(m,\ n)$은
$(1,\ 5)$, $(1,\ 6)$, $(1,\ 7)$, $(2,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 6)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$, $(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 1)$, $(6,\ 2)$, $(7,\ 1)$
의 16개이다.

06 $(-x)^n\times(-x)^{n+1}\div x^n+x^{2n}\div x^{n+1}\times x^2$
$=\dfrac{(-x)^{2n+1}}{x^n}+\dfrac{x^{2n}\times x^2}{x^{n+1}}$
$=\dfrac{(-1)^{2n+1}x^{2n+1}}{x^n}+\dfrac{x^{2n+2}}{x^{n+1}}$
$=(-1)\times x^{n+1}+x^{n+1}$
$=-x^{n+1}+x^{n+1}=0$

[다른 풀이]
n이 짝수일 때, $(-x)^n=x^n$, $(-x)^{n+1}=-x^{n+1}$이므로
(주어진 식)$=x^n\times(-x^{n+1})\div x^n+x^{2n}\div x^{n+1}\times x^2$
$=-x^{n+(n+1)-n}+x^{2n-(n+1)+2}=-x^{n+1}+x^{n+1}=0$
n이 홀수일 때, $(-x)^n=-x^n$, $(-x)^{n+1}=x^{n+1}$이므로
(주어진 식)$=(-x^n)\times x^{n+1}\div x^n+x^{2n}\div x^{n+1}\times x^2$
$=-x^{n+(n+1)-n}+x^{2n-(n+1)+2}=-x^{n+1}+x^{n+1}=0$
$\therefore$ (주어진 식)$=0$

07 $17=\dfrac{85}{5}=\dfrac{85}{85^b}=85^{1-b}$이므로
$17^{\frac{3a+b}{1-b}}=(85^{1-b})^{\frac{3a+b}{1-b}}=85^{3a+b}$
$=85^{3a}\times85^b=(85^a)^3\times85^b$
$=3^3\times5=135$

08 각 칸에 들어갈 수가 오른쪽 그림과 같다고 하면 가로 칸의 수들의 곱과 세로 칸의 수들의 곱이 같으므로

	2^b	
2^d	2^a	2^e
	2^c	

$2^d\times2^a\times2^e=2^b\times2^a\times2^c$,
$2^{d+a+e}=2^{b+a+c}$에서
$d+a+e=b+a+c\qquad\therefore\ d+e=b+c$
두 수의 합이 서로 같아지는 경우를 찾으면
(i) $2+5=3+4\ \Rightarrow\ a=6$
(ii) $2+6=3+5\ \Rightarrow\ a=4$
(iii) $3+6=4+5\ \Rightarrow\ a=2$
따라서 (i)~(iii)에 의해 A에 넣을 수 있는 수는 2^2, 2^4, 2^6이다.

09 2^6은 2^6, 4^3, 8^2, 64로 4번 나타나듯이 소수의 거듭제곱과 같은 수는 그 소수의 지수의 약수의 개수만큼 나타난다.
$9^{12}=(3^2)^{12}=3^{24}$
$24=2^3\times3$에서 24의 약수의 개수는
$(3+1)\times(1+1)=8$(개)
따라서 9^{12}은 8번 나타난다.

10 $1^n+2^n+3^n$을 10으로 나눈 나머지는 $1^n+2^n+3^n$의 일의 자리의 숫자이다.
1^n의 일의 자리의 숫자는 1, 1, 1, 1, 1, $\cdots$,
2^n의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6, 2, $\cdots$,
3^n의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1, 3, $\cdots$이다.
즉, $1^n+2^n+3^n$의 일의 자리의 숫자는 6, 4, 6, 8의 순서로 반복된다.
ㄱ. $f(5)=6$, $f(7)=6$이므로 $f(5)=f(7)$
ㄴ. $f(n)$은 6, 4, 6, 8의 순서로 반복되므로
$f(n)=f(n+4)$
ㄷ. $f(4n)=8$, $f(4n+2)=4$이므로 $f(4n)\ne f(4n+2)$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11 $\dfrac{a^{-1}+a^{-2}+\cdots+a^{-10}}{a^{-11}+a^{-12}+\cdots+a^{-20}}=\dfrac{a^{-1}+a^{-2}+\cdots+a^{-10}}{a^{-10}(a^{-1}+a^{-2}+\cdots+a^{-10})}$
$=\dfrac{1}{a^{-10}}=a^{10}$
$\therefore\ x=10$

12 $P(10)=1+x+\cdots+8x^8+9x^9+10x^{10}$

$P(9)=1+x+\cdots+8x^8+9x^9$

$\vdots$

$P(2)=1+x+2x^2$

$P(1)=1+x$

이므로

$P(10)-P(9)=10x^{10},\ P(8)-P(7)=8x^8,$

$\cdots,\ P(2)-P(1)=2x^2$

$\therefore P(10)-P(9)+P(8)-P(7)+\cdots+P(2)-P(1)$

$=10x^{10}+8x^8+6x^6+4x^4+2x^2$

13 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$에서

$a+b=10$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 9),\ (2,\ 8),\ (3,\ 7),\ (4,\ 6),\ (5,\ 5),\ (6,\ 4),$

$(7,\ 3),\ (8,\ 2),\ (9,\ 1)$이다.

이때 $c=ab$이고 ab가 최대인 것은 $a=5,\ b=5$일 때이다.

따라서 c의 최댓값은 $5\times5=25$이다.

14 $c^2+d^2=(c+d)^2-2cd=(-3)^2-2\times2=5$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^2+y^2&=(ac+bd)^2+(ad+bc)^2\\&=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+4abcd\\&=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)+4abcd\\&=5a^2+5b^2+4\times8\times2\\&=5(a^2+b^2)+64\\&=5\times20+64=164\end{aligned}$$

15 $3726=x$로 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\frac{x-6}{x^2-(x-2)(x+3)}\\&=\frac{x-6}{x^2-(x^2+x-6)}\\&=\frac{x-6}{-(x-6)}=-1\end{aligned}$$

16 점 D가 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{x+y}{2}$

$\overline{\mathrm{CD}}=x-\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{x-y}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{색칠한 부분의 넓이})&=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\\&=\frac{x^2+2xy+y^2}{4}+\frac{x^2-2xy+y^2}{4}\\&=\frac{2x^2+2y^2}{4}=\frac{x^2+y^2}{2}\end{aligned}$$

17 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=5^2-2\times7=11$

$$\begin{aligned}\therefore\ &(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\\&=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\\&=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)\\&=2\times11-2\times7=8\end{aligned}$$

18 $x^2+x+1=0$의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0,\ x^3-1=0$

$\therefore\ x^3=1$

또 $x\neq0$이므로 $x^2+x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x+1+\dfrac{1}{x}=0$에서 $x+\dfrac{1}{x}=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ x^{-8}+x^8&=x^8+\frac{1}{x^8}=(x^3)^2\times x^2+\frac{1}{(x^3)^2\times x^2}\\&=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\\&=(-1)^2-2=-1\end{aligned}$$

$\therefore\ x^{-8}+3x^3+x^8=-1+3=2$

19 $A=(12x^5y^4-8x^4y^5)\div(-2xy^2)^2$

$=\dfrac{12x^5y^4-8x^4y^5}{4x^2y^4}=3x^3-2x^2y$

$B=x(x+1)^2-2y(x-1)^2$

$=x^3+2x^2+x-2x^2y+4xy-2y$

$A-(B-2C)=2x^3+3x+4y$에서

$2C=(2x^3+3x+4y)-A+B$

$=(2x^3+3x+4y)-(3x^3-2x^2y)$

$+(x^3+2x^2+x-2x^2y+4xy-2y)$

$=2x^2+4x+4xy+2y$

$\therefore\ C=x^2+2x+2xy+y$

20 $x+\dfrac{1}{z}=b$에서 $\dfrac{1}{z}=b-x$ $\quad\therefore\ z=\dfrac{1}{b-x}$

$y+\dfrac{1}{x}=c$에서 $y=c-\dfrac{1}{x}=\dfrac{cx-1}{x}$

즉, $xyz=1$에서 $x\times\dfrac{cx-1}{x}\times\dfrac{1}{b-x}=1$이므로

$cx-1=b-x,\ (c+1)x=b+1$ $\quad\therefore\ x=\dfrac{b+1}{c+1}$

이때 $y=c-\dfrac{1}{x}=c-\dfrac{c+1}{b+1}=\dfrac{bc-1}{b+1}$이고

$z=\dfrac{1}{b-x}=\dfrac{1}{b-\dfrac{b+1}{c+1}}=\dfrac{c+1}{bc-1}$이다.

$\therefore\ z+\dfrac{1}{y}=\dfrac{c+1}{bc-1}+\dfrac{b+1}{bc-1}=\dfrac{b+c+2}{bc-1}$

21 $abc:bcd:cda:dab=1:2:3:4$이므로

$abc=k,\ bcd=2k,\ cda=3k,\ dab=4k\ (k\neq0)$라 하면

$\dfrac{bcd}{cda}=\dfrac{2k}{3k},\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{3}$ $\quad\therefore\ b=\dfrac{2}{3}a$

$\dfrac{bcd}{dab}=\dfrac{2k}{4k},\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\ c=\dfrac{1}{2}a$

$\dfrac{bcd}{abc}=\dfrac{2k}{k},\ \dfrac{d}{a}=2$ $\quad\therefore\ d=2a$

$\therefore\ a:b:c:d=a:\dfrac{2}{3}a:\dfrac{1}{2}a:2a$

$=6:4:3:12$

22 $xyz=1$에서 $z=\dfrac{1}{xy}$이므로

$$\frac{1}{y+\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{z+\frac{1}{y}+1}+\frac{1}{x+\frac{1}{z}+1}$$
$$=\frac{1}{y+\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{\frac{1}{xy}+\frac{1}{y}+1}+\frac{1}{x+xy+1}$$
$$=\frac{x}{xy+1+x}+\frac{xy}{1+x+xy}+\frac{1}{x+xy+1}$$
$$=\frac{xy+x+1}{xy+x+1}=1$$

23 2학년과 3학년의 학생 수의 비가 $5:6$이므로 2학년의 학생 수가 b명이면 3학년의 학생 수는 $\dfrac{6}{5}b$명이다.

전체 학생 수는 $\left(a+b+\dfrac{6}{5}b\right)$명이고, 1학년의 학생 수가 전체 학생 수의 $\dfrac{1}{3}$이므로

$$a=\frac{1}{3}\left(a+b+\frac{6}{5}b\right),\ 3a=a+\frac{11}{5}b$$
$$2a=\frac{11}{5}b \qquad \therefore\ b=\frac{10}{11}a$$

24 부품 C를 45개 살 수 있는 비용을 M원, 부품 A, B, C의 1개당 가격을 각각 a원, b원, c원이라 하면 제품 P를 조립하는 데 드는 비용은 $(a+b)$원이므로
$(a+b)\times36=c\times45=M$에서
$$a+b=\frac{M}{36},\ c=\frac{M}{45}$$
$$\therefore\ (\text{제품 Q의 개수})=\frac{M}{a+b+c}=\frac{M}{\frac{M}{36}+\frac{M}{45}}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{36}+\frac{1}{45}}=\frac{180}{9}=20(\text{개})$$
따라서 제품 Q를 20개 조립할 수 있다.

특목 경시 대비 논술·구술 도전하기 P.48~49

1 (1) |예시| $\dfrac{2}{7}$를 나눗셈 $2\div7$을 이용하여 소수로 나타내어 보자.
$2\div7$의 몫은 나눗셈 $1\div7$의 계산 과정에서 나머지가 2일 때의 몫인 2부터 되풀이되므로
$$\frac{2}{7}=0.285714285714\cdots$$
$$=0.\dot{2}8571\dot{4}$$

$$\begin{array}{r}
0.142857\\
7\overline{)\,10}\\
7\\ \hline
30\\
28\\ \hline
20\\
14\\ \hline
60\\
56\\ \hline
40\\
35\\ \hline
50\\
49\\ \hline
1
\end{array}$$
나머지가 2일 때의 몫
나머지가 2

(2) |예시| 자연수 n을 7로 나눈 나머지는 1부터 6까지의 자연수이므로 $\dfrac{n}{7}=n\div7$의 몫은 6개의 숫자 1, 4, 2, 8, 5, 7의 배열로 나타난다.
또 $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$일 때 $n\div7$의 몫은 각각 나눗셈 $1\div7$의 계산 과정에서 나머지가 1, 2, 3, 4, 5, 6일 때의 몫부터 되풀이된다.

따라서 음이 아닌 정수 k에 대하여 분수 $\dfrac{n}{7}$을 순환소수로 나타낼 때 그 순환마디는
$n=7k+1$일 때 142857,
$n=7k+2$일 때 285714,
$n=7k+3$일 때 428571,
$n=7k+4$일 때 571428,
$n=7k+5$일 때 714285,
$n=7k+6$일 때 857142
가 된다.

[다른 풀이]

(1) |예시| $\dfrac{n}{7}=2\times\dfrac{1}{7}$이고, $2\times142857=285714$이므로
$$\frac{n}{7}=2\times\frac{1}{7}$$
$$=2\times0.142857142857\cdots$$
$$=0.285714285714\cdots$$
$$=0.\dot{2}8571\dot{4}$$

(2) |예시| 자연수 n을 7로 나눈 나머지는 1부터 6까지의 자연수이므로 $\dfrac{n}{7}=n\div7$의 몫은 6개의 숫자 1, 4, 2, 8, 5, 7의 배열로 나타난다.

따라서 음이 아닌 정수 k에 대하여 분수 $\dfrac{n}{7}$을 순환소수로 나타낼 때 그 순환마디는
$n=7k+1$일 때 142857,
$n=7k+2$일 때 $2\times142857=285714$,
$n=7k+3$일 때 $3\times142857=428571$,
$n=7k+4$일 때 $4\times142857=571428$,
$n=7k+5$일 때 $5\times142857=714285$,
$n=7k+6$일 때 $6\times142857=857142$
가 된다.

2 |예시| 십의 자리의 숫자가 x이고 일의 자리의 숫자가 5인 두 자리의 자연수는 $10x+5$이다.
이 두 자리의 자연수의 제곱을 곱셈 공식을 이용하여 나타내면
$$(10x+5)^2=100x^2+100x+25$$
$$=100x(x+1)+25$$
따라서 제곱한 계산 결과의 끝의 두 자리의 수는 항상 25가 되고, 25 앞에는 십의 자리의 숫자 x와 x에 1을 더한 수 $x+1$을 곱한 값을 쓰면 된다.

Ⅱ 연립방정식

1 연립방정식

STEP 1 유형별 문제 공략하기

P.54~58

1-1 $x=3,\ y=1$ **1-2** $(2,\ 1)$ **1-3** 2
1-4 11 **1-5** 8개 **2-1** ②
2-2 $(-3,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (1,\ 5),\ (3,\ 3)$ **3-1** -1
3-2 3 **3-3** -2 **3-4** $x=-2$
4-1 (1) $x=\frac{8}{3},\ y=1$ (2) $x=-6,\ y=-4$
(3) $x=13,\ y=-4$
4-2 $\frac{1}{6}$ **4-3** 3
5-1 (1) $x=\frac{1}{4},\ y=\frac{1}{3}$ (2) $x=2,\ y=-2$ **5-2** $\frac{1}{4}$
5-3 $x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$ **6-1** 5 **6-2** $x=2,\ y=7$
6-3 -2 **6-4** $(2,\ 3)$
7-1 (1) $x=2,\ y=1,\ z=-1$ (2) $x=1,\ y=2,\ z=3$
7-2 $x=4,\ y=6,\ z=14$
7-3 $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{5}{2},\ z=-\frac{3}{2}$
8-1 $\frac{21}{19}$ **8-2** $x=10,\ y=15,\ z=25$
9-1 $x=-1,\ y=0$ 또는 $x=3,\ y=-2$
9-2 $(-6,\ 2)$ 또는 $(6,\ 2)$ **10-1** 2 **10-2** 1
10-3 $a=2,\ b=-3$ **10-4** ②

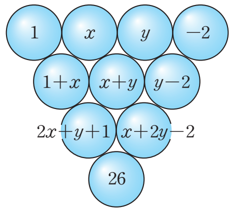
1-1 $2x \circ 3y=21$에서 $2\times 2x+3\times 3y=21$
즉, $4x+9y=21$
$x,\ y$가 자연수이므로 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(3,\ 1)$이다.
$\therefore\ x=3,\ y=1$

1-2 $x=-4,\ y=5$를 $ax-by=-13$에 대입하면
$-4a-5b=-13$에서 $4a+5b=13$
$a,\ b$는 자연수이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 1)$이다.

1-3 $3x-2y=a+2x-3y$에서
$x+y=a$
이때 $x,\ y$가 자연수이므로 a는 2 이상의 자연수이다.
$a=2$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 1)$
$a=3$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 2),\ (2,\ 1)$
$a=4$일 때, 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$
⋮
이와 같이 a의 값이 커질수록 $(x,\ y)$의 개수는 늘어난다.
따라서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $a=2$일 때에만 1개이다.
$\therefore\ a=2$

1-4 $-2x+5y=6$에서 $5y=2x+6=2(x+3)$이므로
y는 2의 배수이다.
즉, y는 28의 약수 중 2의 배수이므로
$y=2,\ 4,\ 14,\ 28$
$-2x+5y=6$에 y의 값을 차례로 대입하여 풀면
$x=2,\ 7,\ 32,\ 67$
즉, 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(2,\ 2),\ (7,\ 4),\ (32,\ 14),\ (67,\ 28)$이다.
이때 $x,\ y$의 최소공배수가 28이므로 $x=7,\ y=4$
$\therefore\ x+y=7+4=11$

1-5 ◯ 안의 수는 바로 위의 양 옆의 ◯ 안의 수의 합이므로 ◯ 안을 모두 채우면 오른쪽 그림과 같다.



$(2x+y+1)+(x+2y-2)=26$
$3x+3y-1=26$
$\therefore\ x+y=9$
$x,\ y$는 자연수이므로 주어진 그림을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(1,\ 8),\ (2,\ 7),\ (3,\ 6),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (6,\ 3),\ (7,\ 2),\ (8,\ 1)$의 8개이다.

2-1 $(x+1)(y-2)=15$에서
$x+1$과 $y-2$는 정수이므로 순서쌍 $(x+1,\ y-2)$는
$(-15,\ -1),\ (-5,\ -3),\ (-3,\ -5),\ (-1,\ -15),$
$(1,\ 15),\ (3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (15,\ 1)$이다.
따라서 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(-16,\ 1),\ (-6,\ -1),\ (-4,\ -3),\ (-2,\ -13),$
$(0,\ 17),\ (2,\ 7),\ (4,\ 5),\ (14,\ 3)$의 8개이다.

2-2 $3xy-6x-9=0$에서
$xy-2x-3=0,\ xy-2x=3$
$\therefore\ x(y-2)=3$
이때 x와 $y-2$는 정수이므로 순서쌍 $(x,\ y-2)$는
$(-3,\ -1),\ (-1,\ -3),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$이다.
따라서 순서쌍 $(x,\ y)$는
$(-3,\ 1),\ (-1,\ -1),\ (1,\ 5),\ (3,\ 3)$이다.

3-1 연립방정식 $\begin{cases} 4x+3y=7 & \cdots ㉠ \\ 3x+2y=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$에서
㉠$\times 2-$㉡$\times 3$을 하면 $-x=-4$ $\therefore\ x=4$
$x=4$를 ㉡에 대입하면 $12+2y=6$
$\therefore\ y=-3$
$x=4,\ y=-3$을 $kx-(2k+3)y=-1$에 대입하면
$4k+6k+9=-1$
$\therefore\ k=-1$

3-2 연립방정식 $\begin{cases} ax-11y=-7 & \cdots ㉠ \\ -2ax+9y=-12 & \cdots ㉡ \end{cases}$에서
㉠$\times 2+$㉡을 하면 $-13y=-26$ $\therefore\ y=2$
$x : y=5 : 2$에서 $2x=5y$이므로
$y=2$를 $2x=5y$에 대입하면 $2x=10$ $\therefore\ x=5$
$x=5,\ y=2$를 ㉠에 대입하면
$5a-22=-7$ $\therefore\ a=3$

3-3 주어진 연립방정식에 $x=t$, $y=2t$를 각각 대입하면

$\begin{cases} t(m-4)+2t(2-m)=-1 \\ mt-2t(m-2)=-3 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} mt=1 & \cdots ㉠ \\ 4t-mt=-3 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4t-1=-3$ $\quad \therefore t=-\dfrac{1}{2}$

$t=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $-\dfrac{1}{2}m=1$ $\quad \therefore m=-2$

3-4 주어진 연립방정식에 $x=-2$, $y=3$을 각각 대입하면

$\begin{cases} -2a+3=b & \cdots ㉠ \\ -2c+3=d & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠-㉡을 하면 $-2a+2c=b-d$

$2(c-a)=b-d$ $\quad \therefore \dfrac{b-d}{c-a}=2$ $\quad \cdots ㉢$

x에 대한 일차방정식 $b-ax=d-cx$에서

$cx-ax=d-b$, $(c-a)x=-(b-d)$

$\therefore x=-\dfrac{b-d}{c-a}=-2$ ($\because$ ㉢)

4-1 (1) $\begin{cases} 0.\dot{3}x+1.\dot{2}y=2.\dot{1} & \cdots ㉠ \\ 0.75x-0.5(y+1)=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\dfrac{3}{9}x+\dfrac{11}{9}y=\dfrac{19}{9}$

양변에 9를 곱하면 $3x+11y=19$

㉡의 양변에 100을 곱하여 정리하면

$75x-50(y+1)=100$ $\quad \therefore 3x-2y=6$

즉, $\begin{cases} 3x+11y=19 & \cdots ㉢ \\ 3x-2y=6 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢-㉣을 하면 $13y=13$ $\quad \therefore y=1$

$y=1$을 ㉢에 대입하면 $3x+11=19$ $\quad \therefore x=\dfrac{8}{3}$

$\therefore x=\dfrac{8}{3}$, $y=1$

(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{3y-8}{5}=2 & \cdots ㉠ \\ \dfrac{3x-2}{2}-\dfrac{x+y}{3}=-\dfrac{20}{3} & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 15를 곱하여 정리하면

$5x-3(3y-8)=30$ $\quad \therefore 5x-9y=6$

㉡의 양변에 6을 곱하여 정리하면

$3(3x-2)-2(x+y)=-40$ $\quad \therefore 7x-2y=-34$

즉, $\begin{cases} 5x-9y=6 & \cdots ㉢ \\ 7x-2y=-34 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢$\times 7-$㉣$\times 5$를 하면 $-53y=212$ $\quad \therefore y=-4$

$y=-4$를 ㉢에 대입하면 $5x+36=6$ $\quad \therefore x=-6$

$\therefore x=-6$, $y=-4$

(3) 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{x+y-3}{2} & \cdots ㉠ \\ \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{x-y-2}{5} & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠의 양변에 6을 곱하여 정리하면

$2(x-4)=3(x+y-3)$ $\quad \therefore x+3y=1$

㉡의 양변에 15를 곱하여 정리하면

$5(x-4)=3(x-y-2)$ $\quad \therefore 2x+3y=14$

즉, $\begin{cases} x+3y=1 & \cdots ㉢ \\ 2x+3y=14 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢-㉣을 하면 $-x=-13$ $\quad \therefore x=13$

$x=13$을 ㉢에 대입하면 $13+3y=1$ $\quad \therefore y=-4$

$\therefore x=13$, $y=-4$

4-2 $(x+1):9=(y+1):8$에서

$8(x+1)=9(y+1)$ $\quad \therefore 8x-9y=1$

$(x+y):(x-y)=5:1$에서

$x+y=5(x-y)$ $\quad \therefore 2x-3y=0$

즉, 연립방정식 $\begin{cases} 8x-9y=1 & \cdots ㉠ \\ 2x-3y=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡$\times 4$를 하면 $3y=1$ $\quad \therefore y=\dfrac{1}{3}$

$y=\dfrac{1}{3}$을 ㉡에 대입하면 $2x-1=0$ $\quad \therefore x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore xy=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

4-3 $x=2$, $y=1$을 주어진 방정식에 대입하면

$8a+b-11=3(2a-1)-2b=-1$

연립방정식 $\begin{cases} 8a+b-11=-1 \\ 3(2a-1)-2b=-1 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 8a+b=10 & \cdots ㉠ \\ 3a-b=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $11a=11$ $\quad \therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $8+b=10$ $\quad \therefore b=2$

$\therefore a+b=1+2=3$

5-1 (1) $\dfrac{1}{x}=A$, $\dfrac{1}{y}=B$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} 2A-B=5 & \cdots ㉠ \\ -A+2B=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡$\times 2$를 하면 $3B=9$ $\quad \therefore B=3$

$B=3$을 ㉡에 대입하면 $-A+6=2$ $\quad \therefore A=4$

즉, $\dfrac{1}{x}=4$, $\dfrac{1}{y}=3$

$\therefore x=\dfrac{1}{4}$, $y=\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{1}{x}=A$, $\dfrac{1}{y}=B$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} A+4B=-\dfrac{3}{2} & \cdots ㉠ \\ 3A-2B=\dfrac{5}{2} & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$+$㉡$\times 2$를 하면 $7A=\dfrac{7}{2}$ $\quad \therefore A=\dfrac{1}{2}$

$A=\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{1}{2}+4B=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore B=-\dfrac{1}{2}$

즉, $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore x=2$, $y=-2$

5-2 $\dfrac{1}{x-y}=A,\ \dfrac{1}{x+y}=B$라 하면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} A-B=1 & \cdots ㉠ \\ A+2B=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠－㉡을 하면 $-3B=-6$ $\quad\therefore B=2$

$B=2$를 ㉠에 대입하면 $A-2=1$ $\quad\therefore A=3$

즉, $\dfrac{1}{x-y}=3,\ \dfrac{1}{x+y}=2$이므로

연립방정식 $\begin{cases} x-y=\dfrac{1}{3} & \cdots ㉢ \\ x+y=\dfrac{1}{2} & \cdots ㉣ \end{cases}$에서

㉢＋㉣을 하면 $2x=\dfrac{5}{6}$ $\quad\therefore x=\dfrac{5}{12}$

$x=\dfrac{5}{12}$를 ㉣에 대입하면 $\dfrac{5}{12}+y=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore y=\dfrac{1}{12}$

$x-2y=\dfrac{5}{12}-2\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore m=\dfrac{1}{4}$

5-3 $\dfrac{1-3x}{x}+\dfrac{2y+3}{y}=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{1-2y}{y}=3$에서

$\left(\dfrac{1}{x}-3\right)+\left(2+\dfrac{3}{y}\right)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{y}-2\right)=3$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}-1=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-1=3$

$\dfrac{1}{x}=A,\ \dfrac{1}{y}=B$라 하면 주어진 방정식은

$A+3B-1=-A+B-1=3$

즉, 연립방정식 $\begin{cases} A+3B-1=3 \\ -A+B-1=3 \end{cases}$에서

$\begin{cases} A+3B=4 & \cdots ㉠ \\ -A+B=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠＋㉡을 하면 $4B=8$ $\quad\therefore B=2$

$B=2$를 ㉠에 대입하면 $A+6=4$ $\quad\therefore A=-2$

즉, $\dfrac{1}{x}=-2,\ \dfrac{1}{y}=2$

$\therefore x=-\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$

6-1 주어진 두 연립방정식의 해가 서로 같으므로 그 해는 연립방정식 $\begin{cases} 3x-y=a & \cdots ㉠ \\ -x+y=a & \cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠－㉡을 하면 $4x-2y=0$ $\quad\therefore y=2x$

$y=2x$를 $x-2y=-3$에 대입하면

$x-4x=-3$ $\quad\therefore x=1$

$x=1$이므로 $y=2x=2\times1=2$

$x=1,\ y=2$를 $3x-y=a$에 대입하면 $a=1$

$a=1,\ x=1,\ y=2$를 $2x+ay=b$에 대입하면 $b=4$

$\therefore a+b=1+4=5$

6-2 혜림이는 q를, 민희는 p를 바르게 보고 푼 것이므로

$qx+y=11$에 $x=3,\ y=5$를 대입하면

$3q+5=11$ $\quad\therefore q=2$

$-3x+y=p$에 $x=1,\ y=4$를 대입하면

$-3+4=p$ $\quad\therefore p=1$

즉, 연립방정식은 $\begin{cases} -3x+y=1 & \cdots ㉠ \\ 2x+y=11 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠－㉡을 하면 $-5x=-10$ $\quad\therefore x=2$

$x=2$를 ㉠에 대입하면 $-6+y=1$ $\quad\therefore y=7$

$\therefore x=2,\ y=7$

6-3 선우는 바르게 풀었으므로 주어진 연립방정식에 $x=1,\ y=-3$을 각각 대입하면

$\begin{cases} a-3b=10 & \cdots ㉠ \\ b-3a=-14 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠×3＋㉡을 하면 $-8b=16$ $\quad\therefore b=-2$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면 $a+6=10$ $\quad\therefore a=4$

이때 민영이는 a와 b를 바꾸어 놓고 풀었으므로

주어진 연립방정식에 $a=-2,\ b=4$를 각각 대입하면

$\begin{cases} -2x+4y=10 & \cdots ㉢ \\ 4x-2y=-14 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢×2＋㉣을 하면 $6y=6$ $\quad\therefore y=1$

$y=1$을 ㉢에 대입하면 $-2x+4=10$ $\quad\therefore x=-3$

따라서 $p=-3,\ q=1$이므로 $p+q=-2$

6-4 주어진 두 연립방정식의 해가 서로 같으므로 그 해는 연립방정식 $\begin{cases} 2x-3y=7 & \cdots ㉠ \\ x+y=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$의 해와 같다.

㉠－㉡×2를 하면 $-5y=5$ $\quad\therefore y=-1$

$y=-1$을 ㉡에 대입하면 $x-1=1$ $\quad\therefore x=2$

$\begin{cases} ax-by=6 \\ bx-ay=-3 \end{cases}$에 $x=2,\ y=-1$을 각각 대입하면

$\begin{cases} 2a+b=6 & \cdots ㉢ \\ 2b+a=-3 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢－㉣×2를 하면 $-3b=12$ $\quad\therefore b=-4$

$b=-4$를 ㉣에 대입하면 $-8+a=-3$ $\quad\therefore a=5$

즉, $(5+x)(-4+y)=-7$을 만족하는 순서쌍 $(5+x,\ -4+y)$는

$(-7,\ 1),\ (-1,\ 7),\ (1,\ -7),\ (7,\ -1)$이다.

(i) 순서쌍 $(5+x,\ -4+y)$가 $(-7,\ 1)$일 때,
순서쌍 $(x,\ y)$는 $(-12,\ 5)$

(ii) 순서쌍 $(5+x,\ -4+y)$가 $(-1,\ 7)$일 때,
순서쌍 $(x,\ y)$는 $(-6,\ 11)$

(iii) 순서쌍 $(5+x,\ -4+y)$가 $(1,\ -7)$일 때,
순서쌍 $(x,\ y)$는 $(-4,\ -3)$

(iv) 순서쌍 $(5+x,\ -4+y)$가 $(7,\ -1)$일 때,
순서쌍 $(x,\ y)$는 $(2,\ 3)$

$x,\ y$는 자연수이므로 (i)~(iv)에 의해 구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 $(2,\ 3)$이다.

7-1 (1) $\begin{cases} x-2y=0 & \cdots ㉠ \\ x+y-z=4 & \cdots ㉡ \\ 3x-3y+z=2 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y$이므로 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$\begin{cases} 2y+y-z=4 \\ 6y-3y+z=2 \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 3y-z=4 & \cdots ㉣ \\ 3y+z=2 & \cdots ㉤ \end{cases}$

㉣+㉤을 하면 $6y=6$ $\therefore y=1$

$y=1$을 ㉤에 대입하면 $3+z=2$ $\therefore z=-1$

$y=1$을 ㉠에 대입하면 $x-2=0$ $\therefore x=2$

$\therefore x=2,\ y=1,\ z=-1$

(2) $\begin{cases} 2x+y+z=7 & \cdots ㉠ \\ x+2y+z=8 & \cdots ㉡ \\ x+y+2z=9 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 모두 더하면

$4x+4y+4z=24$

$\therefore x+y+z=6$ $\cdots$㉣

㉠−㉣을 하면 $x=1$

㉡−㉣을 하면 $y=2$

㉢−㉣을 하면 $z=3$

$\therefore x=1,\ y=2,\ z=3$

[다른 풀이]

㉠−㉡을 하면 $x-y=-1$ $\cdots$㉣

㉡×2−㉢을 하면 $x+3y=7$ $\cdots$㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=2$

$x=1,\ y=2$를 ㉠에 대입하면 $z=3$

$\therefore x=1,\ y=2,\ z=3$

7-2 $(x+y):(y+z):(z+x)=5:10:9$에서

$x+y=5k,\ y+z=10k,\ z+x=9k\ (k\neq0)$라 하면

$\begin{cases} x+y=5k & \cdots ㉠ \\ y+z=10k & \cdots ㉡ \\ z+x=9k & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(x+y+z)=24k$

$\therefore x+y+z=12k$

이때 $x+y+z=24$이므로 $k=2$

따라서 $x+y=10,\ y+z=20,\ z+x=18$이다.

$\therefore x=4,\ y=6,\ z=14$

7-3 $\dfrac{1}{x+y}=A,\ \dfrac{1}{y+z}=B,\ \dfrac{1}{z+x}=C$라 하면 주어진 연립

방정식은 $\begin{cases} 6A-B=1 & \cdots ㉠ \\ 2B+C=1 & \cdots ㉡ \\ 4C+3A=-3 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠에서 $B=6A-1$이므로 ㉡에 대입하면

$12A-2+C=1$

$\therefore 12A+C=3$ $\cdots$㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$A=\dfrac{1}{3},\ C=-1$

$A=\dfrac{1}{3}$이므로 $B=6A-1=2-1=1$

즉, $\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{y+z}=1,\ \dfrac{1}{z+x}=-1$이므로

$\begin{cases} x+y=3 & \cdots ㉤ \\ y+z=1 & \cdots ㉥ \\ z+x=-1 & \cdots ㉦ \end{cases}$

㉤+㉥+㉦을 하면 $2(x+y+z)=3$

$\therefore x+y+z=\dfrac{3}{2}$ $\cdots$㉧

㉧−㉥을 하면 $x=\dfrac{1}{2}$

㉧−㉦을 하면 $y=\dfrac{5}{2}$

㉧−㉤을 하면 $z=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{5}{2},\ z=-\dfrac{3}{2}$

8-1 연립방정식 $\begin{cases} 2x-3y+z=0 & \cdots ㉠ \\ 6x+y-z=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $8x-2y=0$ $\therefore y=4x$

$y=4x$를 ㉠에 대입하면

$2x-12x+z=0$ $\therefore z=10x$

$\therefore \dfrac{5x-y+2z}{x+2y+z}=\dfrac{5x-4x+20x}{x+8x+10x}$

$=\dfrac{21x}{19x}=\dfrac{21}{19}$

8-2 연립방정식 $\begin{cases} 2x+7y-5z=0 & \cdots ㉠ \\ x+y-z=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면 $5y-3z=0$ $\therefore y=\dfrac{3}{5}z$

$y=\dfrac{3}{5}z$를 ㉡에 대입하면

$x+\dfrac{3}{5}z-z=0$ $\therefore x=\dfrac{2}{5}z$

$x:y:z=\dfrac{2}{5}z:\dfrac{3}{5}z:z=2:3:5$이므로

$x=2k,\ y=3k,\ z=5k\ (k\neq0)$라 하자.

$2k,\ 3k,\ 5k$의 최소공배수가 150이므로

$30k=150$ $\therefore k=5$

$\therefore x=10,\ y=15,\ z=25$

9-1 x의 범위를 나누어 생각한다.

(i) $x\geq2$일 때,

연립방정식 $\begin{cases} x-2-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$을 풀면

$x=3,\ y=-2$

(ii) $x<2$일 때,

연립방정식 $\begin{cases} -(x-2)-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$을 풀면

$x=-1,\ y=0$

따라서 (i), (ii)에 의해 연립방정식의 해는

$x=-1,\ y=0$ 또는 $x=3,\ y=-2$이다.

9-2 연립방정식 $\begin{cases} |x|+y=8 & \cdots ㉠ \\ |x|-y=4 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $2|x|=12,\ |x|=6$

$\therefore x=6$ 또는 $x=-6$

$|x|=6$을 ㉠에 대입하면 $y=2$

따라서 연립방정식의 해는 $(-6,\ 2)$ 또는 $(6,\ 2)$이다.

[다른 풀이]

(i) $x\geq 0$일 때,

연립방정식 $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=4 \end{cases}$를 풀면

$x=6,\ y=2$

(ii) $x<0$일 때,

연립방정식 $\begin{cases} -x+y=8 \\ -x-y=4 \end{cases}$를 풀면

$x=-6,\ y=2$

따라서 (i), (ii)에 의해 연립방정식의 해는

$(-6,\ 2)$ 또는 $(6,\ 2)$이다.

10-1 연립방정식 $\begin{cases} ax-3y=a \\ (a-6)x+6y=a \end{cases}$의 y의 계수를 같게 하면

$\begin{cases} -2ax+6y=-2a \\ (a-6)x+6y=a \end{cases}$에서 해가 없으므로

$-2a=a-6,\ -2a\neq a$

$\therefore\ a=2$

10-2 방정식 $\dfrac{x-5}{4}+\dfrac{7-y}{3}=1$을 만족하는 모든 $x,\ y$에 대하여 $ax+by=1$이 성립하므로

연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{x-5}{4}+\dfrac{7-y}{3}=1 \\ ax+by=1 \end{cases}$의 해가 무수히 많다.

상수항을 같게 하면 $\begin{cases} 3x-4y=-1 \\ -ax-by=-1 \end{cases}$에서 해가 무수히 많으므로

$3=-a,\ -4=-b$

$\therefore\ a=-3,\ b=4$

$\therefore\ a+b=1$

10-3 연립방정식 $\begin{cases} x+ay=5 \\ 2x+4y=5a \end{cases}$의 x의 계수를 같게 하면

$\begin{cases} 2x+2ay=10 \\ 2x+4y=5a \end{cases}$에서 해가 무수히 많으므로

$2a=4,\ 10=5a$

$\therefore\ a=2$

방정식 $(b-a+5)x+(b-1)=0$의 해가 없으므로

$(b+3)x=1-b$에서

$b+3=0,\ 1-b\neq 0$

$\therefore\ b=-3$

10-4 연립방정식 $\begin{cases} ax+by=10 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$에서 해가 없으므로

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}\neq\dfrac{10}{5}$

$\therefore\ a\neq 4,\ b\neq 6,\ 3a=2b$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3),\ (6,\ 9)$의 2개이다.

STEP 2 실전 문제 **정복**하기

P.59~61

01 14개 **02** ② **03** 6 **04** 4

05 $x=\dfrac{33}{2},\ y=-14$ **06** ④ **07** -8

08 $a=11,\ b=11$ **09** $\dfrac{73}{4}$ **10** $A=2,\ B=6,\ C=4$

11 3

12 (1) $a=-1,\ b=1,\ c=0,\ d=2$

(2) $x=1,\ y=2,\ z=3,\ w=4$

13 2 **14** $\dfrac{33}{34}$ **15** ③ **16** 3 **17** 8

18 $a=2,\ b=5$

01 $x-3y=11$, 즉 $y=\dfrac{x-11}{3}$에서 y가 정수이려면

$x-11$이 3으로 나누어떨어져야 한다.

즉, x의 값은 -19부터 3씩 커지는 수이므로

$x=-19,\ -16,\ -13,\ \cdots,\ 14,\ 17,\ 20$

따라서 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는 14개이다.

02 $ac+bc=11$에서 $c(a+b)=11$ $\cdots$㉠

$ab+bc=27$에서 $b(a+c)=27$ $\cdots$㉡

이때 $a,\ b,\ c$는 모두 자연수이므로 ㉠에서

$c=1,\ a+b=11$ 또는 $c=11,\ a+b=1$

(i) $c=1,\ a+b=11$일 때,

㉡에서 $c=1$일 때의 자연수의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는 $(2,\ 9,\ 1),\ (8,\ 3,\ 1),\ (26,\ 1,\ 1)$이다.

이 중에서 $a+b=11$을 만족하는 순서쌍은 $(2,\ 9,\ 1),\ (8,\ 3,\ 1)$이다.

(ii) $c=11,\ a+b=1$일 때,

두 자연수의 합이 1인 경우는 없으므로 구하는 순서쌍은 존재하지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의해 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 2개이다.

03 $(1,\ x)*(y-1,\ 9)=y-1+x(y-1)+9$

$=xy-x+y+8$

$(y-1,\ 2)*(x,\ 2)=x(y-1)+2x+2(y-1)$

$=xy+x+2y-2$

즉, 주어진 방정식에서

$xy-x+y+8=xy+x+2y-2$

$\therefore\ 2x+y=10$ $\cdots$㉠

이때 x의 값이 y의 값의 2배이므로

㉠에 $x=2y$를 대입하면

$4y+y=10$에서 $y=2$ $\quad\therefore\ x=2y=4$

$\therefore\ x+y=4+2=6$

04 $mx-y=4$에서 $y=mx-4$이므로

$5x+3y=39$에 대입하면 $(3m+5)x=51$

이때 m은 자연수, x는 정수이므로 $3m+5$는 51의 약수이고, $3m+5\geq 8$이다.

즉, $3m+5=17$ 또는 $3m+5=51$

(ⅰ) $3m+5=17$일 때,

$m=4$

(ⅱ) $3m+5=51$일 때,

$m=\frac{46}{3}$이므로 자연수가 아니다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $m=4$이다.

05 $x\geq y$, $x<y$인 경우로 나누어 생각한다.

(ⅰ) $x\geq y$일 때,

$\max(x, y)=x$, $\min(x, y)=y$이므로

연립방정식 $\begin{cases} x=3x+2y-5 \\ y=-2x-2y-9 \end{cases}$에서

$\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 2x+3y=-9 \end{cases}$ $\quad\therefore x=\frac{33}{2}, y=-14$

(ⅱ) $x<y$일 때,

$\max(x, y)=y$, $\min(x, y)=x$이므로

연립방정식 $\begin{cases} y=3x+2y-5 \\ x=-2x-2y-9 \end{cases}$에서

$\begin{cases} 3x+y=5 \\ 3x+2y=-9 \end{cases}$ $\quad\therefore x=\frac{19}{3}, y=-14$

이때 $x<y$를 만족하지 않으므로 해가 아니다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $x=\frac{33}{2}$, $y=-14$이다.

06 $x-y=1$에서 $y=x-1$이므로

$y=x-1$을 $ax+y=1$에 대입하면

$ax+(x-1)=1$ $\quad\therefore x=\frac{2}{a+1}$

$y=x-1$을 $x-ay=a-1$에 대입하면

$x-a(x-1)=a-1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{a-1}$

$\frac{2}{a+1}=\frac{1}{a-1}$

$\therefore a=3$

07 주어진 두 연립방정식의 해가 서로 같으므로 그 해는

연립방정식 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{3}{y}=-1 \\ \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=2 \end{cases}$의 해와 같다.

$\frac{1}{x}=A$, $\frac{1}{y}=B$라 하면

$\begin{cases} A+3B=-1 & \cdots ㉠ \\ 4A+3B=2 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-$㉡을 하면 $-3A=-3$

$\therefore A=1$

$A=1$을 ㉠에 대입하면 $1+3B=-1$

$\therefore B=-\frac{2}{3}$

$\therefore x=1, y=-\frac{3}{2}$ $\quad\cdots ㉢$

㉢을 연립방정식 $\begin{cases} ax-by=3 \\ ax+by=5 \end{cases}$에 각각 대입하면

$\begin{cases} a+\frac{3}{2}b=3 \\ a-\frac{3}{2}b=5 \end{cases}$ $\quad\therefore a=4, b=-\frac{2}{3}$

$\therefore 3ab=3\times4\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-8$

08 $\begin{cases} ax+by=22 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$의 해를 $x=m$, $y=n$이라 하면

$\begin{cases} am+bn=22 & \cdots ㉠ \\ 3m+4n=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$

이때 $\begin{cases} 5x-2y=-9 \\ -2ax+3y=b-12 \end{cases}$의 해는

$x=m+3$, $y=n+3$이므로

$\begin{cases} 5(m+3)-2(n+3)=-9 \\ -2a(m+3)+3(n+3)=b-12 \end{cases}$

즉, $\begin{cases} 5m-2n=-18 & \cdots ㉢ \\ -2am+3n=6a+b-21 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $m=-2$, $n=4$

㉠, ㉣에 $m=-2$, $n=4$를 각각 대입하면

$\begin{cases} -2a+4b=22 \\ 4a+12=6a+b-21 \end{cases}$

따라서 연립방정식 $\begin{cases} a-2b=-11 \\ 2a+b=33 \end{cases}$을 풀면

$a=11$, $b=11$

09 $\begin{cases} 2x-3xy+2y=23 & \cdots ㉠ \\ 6x+xy+6y=9 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times3-$㉡을 하면 $-10xy=60$

$\therefore xy=-6$

$xy=-6$을 ㉡에 대입하면

$6x-6+6y=9$

$\therefore x+y=\frac{5}{2}$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=\left(\frac{5}{2}\right)^2-2\times(-6)$

$=\frac{73}{4}$

10 천의 자리의 덧셈에서 $A+4=B$, 즉 $A-B=-4$ $\cdots ㉠$

B가 A보다 큰 수이므로 일의 자리의 덧셈에서

$B+B=10+A$, 즉 $A-2B=-10$ $\cdots ㉡$

또 십의 자리의 덧셈에서 $1+B+C=10+1$

즉, $B+C=10$ $\cdots ㉢$

㉠$-$㉡을 하면 $B=6$

$B=6$을 ㉠에 대입하면 $A-6=-4$

$\therefore A=2$

$B=6$을 ㉢에 대입하면 $6+C=10$

$\therefore C=4$

11 $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{3}$에서

$\dfrac{x+y}{xy}=3 \qquad \therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3 \qquad \cdots ㉠$

$\dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{4}$에서

$\dfrac{y+z}{yz}=4 \qquad \therefore \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=4 \qquad \cdots ㉡$

$\dfrac{zx}{z+x}=\dfrac{1}{5}$에서

$\dfrac{z+x}{zx}=5 \qquad \therefore \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=5 \qquad \cdots ㉢$

㉠+㉡+㉢을 하면 $2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=12$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6 \qquad \cdots ㉣$

㉣−㉡을 하면 $\dfrac{1}{x}=2 \qquad \therefore x=\dfrac{1}{2}$

㉣−㉢을 하면 $\dfrac{1}{y}=1 \qquad \therefore y=1$

㉣−㉠을 하면 $\dfrac{1}{z}=3 \qquad \therefore z=\dfrac{1}{3}$

$\therefore 2x+y+3z=2\times\dfrac{1}{2}+1+3\times\dfrac{1}{3}=3$

12 (1) $\begin{cases} a+b+c=0 & \cdots ㉠ \\ b+c+d=3 & \cdots ㉡ \\ c+d+a=1 & \cdots ㉢ \\ d+a+b=2 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉠+㉡+㉢+㉣을 하면 $3(a+b+c+d)=6$

$\therefore a+b+c+d=2 \qquad \cdots ㉤$

㉤−㉡을 하면 $a=-1$

㉤−㉢을 하면 $b=1$

㉤−㉣을 하면 $c=0$

㉤−㉠을 하면 $d=2$

$\therefore a=-1,\ b=1,\ c=0,\ d=2$

(2) $\begin{cases} x+3y=7 & \cdots ㉠ \\ y+3z=11 & \cdots ㉡ \\ z+3w=15 & \cdots ㉢ \\ w+3x=7 & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉠−㉡×3을 하면 $x-9z=-26 \qquad \cdots ㉤$

㉢−㉣×3을 하면 $-9x+z=-6 \qquad \cdots ㉥$

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $x=1,\ z=3$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $1+3y=7 \qquad \therefore y=2$

$z=3$을 ㉢에 대입하면 $3+3w=15 \qquad \therefore w=4$

$\therefore x=1,\ y=2,\ z=3,\ w=4$

13 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2-y}{3}$에서 $3x+2y=7$

$\therefore 2y=7-3x \qquad \cdots ㉠$

㉠을 $x+2y+3z=7$에 대입하면

$x+(7-3x)+3z=7,\ 3z=2x$

$\therefore z=\dfrac{2}{3}x \qquad \cdots ㉡$

또 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z+3}{5}$에서 $5x-2z=11$이므로

㉡을 대입하면 $5x-\dfrac{4}{3}x=11 \qquad \therefore x=3$

$x=3$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 풀면 $y=-1,\ z=2$

따라서 $a=3,\ b=-1,\ c=2$이므로

$|a+b-2c|=|3-1-4|=2$

14 $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right):\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right):\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}\right)=5:6:7$이므로

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5k \qquad \cdots ㉠$

$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6k \qquad \cdots ㉡$

$\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=7k \qquad \cdots ㉢$

$(k\neq 0)$라 하자.

㉠+㉡+㉢을 하면 $2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=18k$

$\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=9k \qquad \cdots ㉣$

㉣−㉡을 하면 $\dfrac{1}{x}=3k$

㉣−㉢을 하면 $\dfrac{1}{y}=2k$

㉣−㉠을 하면 $\dfrac{1}{z}=4k$이므로

$x:y:z=\dfrac{1}{3k}:\dfrac{1}{2k}:\dfrac{1}{4k}=4:6:3$

이때 $x=4l,\ y=6l,\ z=3l\ (l\neq 0)$이라 하면

$\dfrac{xy+z^2}{x^2+yz}=\dfrac{24l^2+9l^2}{16l^2+18l^2}=\dfrac{33l^2}{34l^2}=\dfrac{33}{34}$

15 $x+y+z=1,\ 2x-y-z=0.3$을 각 변끼리 더하면

$3x=1.3 \qquad \therefore x=\dfrac{13}{30}=\dfrac{39}{90}=0.4\dot{3}$

즉, $a=4,\ b=3$이므로

$y=\dfrac{30+c-3}{90}=\dfrac{27+c}{90},\ z=\dfrac{10c+4-c}{90}=\dfrac{9c+4}{90}$

이때 $x+y+z=1$이므로 $\dfrac{39}{90}+\dfrac{27+c}{90}+\dfrac{9c+4}{90}=1$

$10c+70=90 \qquad \therefore c=2$

$\therefore abc=4\times3\times2=24$

16 $x,\ y$의 범위를 각각 나누어 생각한다.

(i) $x\geq 0,\ y\geq 0$일 때,

주어진 연립방정식은 $\begin{cases} 2x+y=9 \\ x=12 \end{cases}$

이것을 풀면 $x=12,\ y=-15$

이때 $y\geq 0$을 만족하지 않으므로 해가 아니다.

(ii) $x\geq 0,\ y<0$일 때,

주어진 연립방정식은 $\begin{cases} 2x+y=9 \\ x-2y=12 \end{cases}$

이것을 풀면 $x=6,\ y=-3$

(ⅲ) $x<0$, $y\ge0$일 때,

주어진 연립방정식은 $\begin{cases} y=9 \\ x=12 \end{cases}$

이때 $x<0$을 만족하지 않으므로 해가 아니다.

(ⅳ) $x<0$, $y<0$일 때,

주어진 연립방정식은 $\begin{cases} y=9 \\ x-2y=12 \end{cases}$

이것을 풀면 $x=30$, $y=9$

이때 $x<0$, $y<0$을 만족하지 않으므로 해가 아니다.

따라서 (ⅰ)~(ⅳ)에 의해 $x=6$, $y=-3$이므로

$a=6$, $y=-3$ $\quad\therefore a+b=3$

17 주어진 연립방정식을 정리하면

$\begin{cases} (3-a)x+y=0 \\ (1-2a)x+3y=0 \end{cases}$의 y의 계수를 같게 하면

$\begin{cases} 3(3-a)x+3y=0 \\ (1-2a)x+3y=0 \end{cases}$에서 해가 무수히 많으므로

$3(3-a)=1-2a \quad \therefore a=8$

18 $\begin{cases} x-2y+3z=-4 & \cdots㉠ \\ 2x-3y+4z=-a & \cdots㉡ \\ 3x-4y+bz=0 & \cdots㉢ \end{cases}$

㉠×2−㉡을 하면 $-y+2z=-8+a$

㉠×3−㉢을 하면 $-2y+(9-b)z=-12$

즉, 연립방정식 $\begin{cases} y-2z=8-a \\ 2y+(b-9)z=12 \end{cases}$의 y의 계수를 같게 하면 $\begin{cases} 2y-4z=16-2a \\ 2y+(b-9)z=12 \end{cases}$에서 해가 무수히 많으므로

$-4=b-9 \quad \therefore b=5$

$16-2a=12 \quad \therefore a=2$

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.62~63

01 (1, 3)	**02** (3, 3, 4), (6, 2, 2)	**03** 0
04 97, 47	**05** 81	**06** (−3, −1), (3, 1)
07 $\frac{49}{4}$	**08** $\frac{16}{5}$	

01 x의 범위를 나누어 생각한다.

(ⅰ) $x\ge3$일 때,

$x-3-2y=2x-6$이므로 $x+2y=3$

이때 $x\ge3$을 만족하는 순서쌍 (x, y)는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $x<3$일 때,

$-x+3-2y=2x-6$이므로 $3x+2y=9$

이때 $x<3$을 만족하는 순서쌍 (x, y)는 (1, 3)이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 순서쌍 (x, y)는 (1, 3)이다.

02 $\begin{cases} x+y+z=10 & \cdots㉠ \\ x-y+2z=8 & \cdots㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면 $2x+3z=18$

$\therefore z=\frac{18-2x}{3}$

이때 z는 자연수이므로 $18-2x$는 3의 배수이어야 한다.

$\therefore x=3,\ 6$

(ⅰ) $x=3$일 때, $z=\frac{12}{3}=4$이므로 ㉠에서 $y=3$

(ⅱ) $x=6$일 때, $z=\frac{6}{3}=2$이므로 ㉠에서 $y=2$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 순서쌍 (x, y, z)는

(3, 3, 4), (6, 2, 2)이다.

03 각 꼭짓점에 있는 숫자는 인접한 세 꼭짓점에 있는 숫자의 합과 같으므로

$\begin{cases} a=b+d+e & \cdots㉠ \\ b=a+c+f & \cdots㉡ \\ c=b+d+g & \cdots㉢ \\ d=a+c+h & \cdots㉣ \end{cases}$

㉠+㉡+㉢+㉣을 하면

$a+b+c+d=2a+2b+2c+2d+e+f+g+h$

$\therefore a+b+c+d+e+f+g+h=0$

04 $a<b<c<d$라 하고 연립방정식을 세우면

$\begin{cases} a+b+c=166 & \cdots㉠ \\ a+b+d=199 & \cdots㉡ \\ a+c+d=208 & \cdots㉢ \\ b+c+d=216 & \cdots㉣ \end{cases}$

㉠+㉡+㉢+㉣을 하면 $3(a+b+c+d)=789$

$\therefore a+b+c+d=263 \quad \cdots㉤$

㉤−㉠을 하면 가장 큰 수는 $d=97$

㉤−㉣을 하면 가장 작은 수는 $a=47$

따라서 구하는 수는 순서대로 97, 47이다.

05 $\begin{cases} 7x^2-3y^2+4z^2=29 & \cdots㉠ \\ 5x^2-2y^2+3z^2=30 & \cdots㉡ \end{cases}$에서

㉡×3−㉠×2를 하면 $x^2+z^2=32$

이때 x, z가 정수이므로 $x^2=16$, $z^2=16$

즉, $x^2=16$, $z^2=16$을 ㉡에 대입하면

$80-2y^2+48=30 \quad \therefore y^2=49$

$\therefore x^2+y^2+z^2=16+49+16=81$

06 $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ xy+y^2=4 \end{cases}$에서 $\begin{cases} x(x+y)=12 & \cdots㉠ \\ y(x+y)=4 & \cdots㉡ \end{cases}$

㉠÷㉡을 하면 $\frac{x}{y}=\frac{12}{4} \quad \therefore x=3y$

$x=3y$를 ㉠ 또는 ㉡에 대입하여 정리하면 $y^2=1$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=1$

$y=-1$일 때, $x=-3$

$y=1$일 때, $x=3$

따라서 순서쌍 (x, y)는 (−3, −1), (3, 1)이다.

07 $\begin{cases} xy+yz=\frac{5}{2}zx \\ yz+zx=6xy \\ zx+xy=\frac{3}{4}yz \end{cases}$ 에서 각 방정식의 양변을 xyz로 나누면

$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{5}{2y}$에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{2y}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{6}{z}$에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{z}$

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4x}$에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{4x}$

즉, $\frac{7}{4x}=\frac{7}{2y}=\frac{7}{z}$이므로 $\frac{7}{4x}=\frac{7}{2y}=\frac{7}{z}=k\ (k\neq 0)$라

하면 $x=\frac{7}{4k}$, $y=\frac{7}{2k}$, $z=\frac{7}{k}$이고,

$\frac{1}{x}=\frac{4k}{7}$, $\frac{1}{y}=\frac{2k}{7}$, $\frac{1}{z}=\frac{k}{7}$

따라서 $x+y+z=\frac{7}{4k}+\frac{7}{2k}+\frac{7}{k}=\frac{49}{4k}$,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4k}{7}+\frac{2k}{7}+\frac{k}{7}=k$이므로

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{49}{4k}\times k=\frac{49}{4}$

[다른 풀이]

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{6}{z}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4x}$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{5}{2y}$이므로

$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$=x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$=x\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+z\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+3$

$=x\times\frac{3}{4x}+y\times\frac{5}{2y}+z\times\frac{6}{z}+3$

$=\frac{3}{4}+\frac{5}{2}+6+3=\frac{49}{4}$

08 $\begin{cases} x-ay+z=0 & \cdots ㉠ \\ x-3by+2z=0 & \cdots ㉡ \\ x+2aby=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉢에서 $x=-2aby$이므로 ㉠, ㉡에 대입하면

$\begin{cases} -2aby-ay+z=0 \\ -2aby-3by+2z=0 \end{cases}$이고 z의 계수를 같게 하면

$\begin{cases} 2(-2ab-a)y+2z=0 \\ (-2ab-3b)y+2z=0 \end{cases}$에서 해가 무수히 많으므로

$2(-2ab-a)=-2ab-3b$

$2ab+2a-3b=0$, $2a(b+1)=3b$

$\therefore\ 2a=\frac{3b}{b+1}=\frac{3(b+1)-3}{b+1}=3-\frac{3}{b+1}$

이때 a, b가 자연수이므로 $b+1=3$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

따라서 $a=1$, $b=2$를 $x+2aby=0$과

$-2aby-ay+z=0$에 각각 대입하면 $x=-4y$, $z=5y$

$\therefore\ \frac{x^2}{yz}=\frac{16y^2}{5y^2}=\frac{16}{5}$

2 연립방정식의 활용

STEP 1 유형별 문제 **공략**하기 P.65~67

1-1 2400원 **1-2** 찬성 : 7명, 반대 : 11명
1-3 25 **1-4** 13살 **1-5** 9 **2-1** 7 : 3 **2-2** ④
2-3 $\frac{4}{3}$km **2-4** 250분 **3-1** A : 500 g, B : 100 g
3-2 480 g **3-3** 5.5 % **4-1** 4일 **4-2** 28일 **4-3** 75분
5-1 남학생 : 336명, 여학생 : 159명
5-2 숙박비 : 51000원, 비행기 요금 : 180000원
5-3 A 상품 : 9000원, B 상품 : 25000원

1-1 볼펜 1개와 연필 1개의 가격을 각각 x원, y원이라 하면

$\begin{cases} 5x+2y=3600 \\ x+4y=1800 \end{cases}$

$\therefore\ x=600,\ y=300$

따라서 볼펜 3개와 연필 2개의 가격의 합은

$3\times 600+2\times 300=2400$(원)

1-2 찬성한 사람의 수를 x명, 반대한 사람의 수를 y명이라 하면 회의에 참석한 사람의 수는 $(x+y)$명이다.

A의 설득으로 2명이 더 찬성하면 전체의 $\frac{1}{2}$이 찬성한 것이므로

$x+2=\frac{1}{2}(x+y)\quad \cdots ㉠$

B의 반대로 1명이 더 반대하면 전체의 $\frac{2}{3}$가 반대한 것이므로

$y+1=\frac{2}{3}(x+y)\quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=7,\ y=11$

따라서 찬성한 사람은 7명, 반대한 사람은 11명이다.

1-3 처음 두 자리의 자연수의 십의 자리의 숫자를 a, 일의 자리의 숫자를 b라 하면

$100a+30+b=15(10a+b)-140$

$\therefore\ 25a+7b=85\quad \cdots ㉠$

이때 a는 한 자리의 자연수이고, b는 0 또는 한 자리의 자연수이므로

(ⅰ) $a=1$일 때,
$25+7b=85$를 만족하는 b는 없다.

(ⅱ) $a=2$일 때,
$50+7b=85$에서 $7b=35$
$\therefore\ b=5$

(ⅲ) $a=3$일 때,
$75+7b=85$를 만족하는 b는 없다.

(ⅳ) $a\geq 4$이면 ㉠을 만족하는 b는 없다.

따라서 (ⅰ)~(ⅳ)에 의해 $a=2$, $b=5$이므로 처음 두 자리의 자연수는 25이다.

[다른 풀이]
b의 값을 기준으로 풀 수도 있다.
$100a+30+b=15(10a+b)-140$에서
$50a+14b=170$
이때 170의 일의 자리의 숫자는 0이므로 $14b$의 일의 자리의 숫자는 0이다.
$\therefore b=0$ 또는 $b=5$
(ⅰ) $b=0$일 때,
$50a=170$를 만족하는 자연수 a는 존재하지 않는다.
(ⅱ) $b=5$일 때,
$50a+70=170 \quad \therefore a=2$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 처음 두 자리의 자연수는 25이다.

1-4 내 아들의 현재 나이를 x살, 나의 현재 나이를 y살이라 하면 내 아버지의 현재 나이는 아들의 현재 나이의 5배이므로 $5x$살이다. 즉, 주어진 조건을 정리하면 다음 표와 같다.

	나의 나이	아들의 나이	아버지의 나이
현재	y살	x살	$5x$살
미래	$5x$살	$(y+8)$살	

아버지와 나의 현재 나이의 합이 100살이므로
$5x+y=100 \quad \cdots ㉠$
나와 내 아들의 나이 차는 시간이 지나도 변하지 않으므로
$y-x=5x-(y+8) \quad \therefore 3x-y=4 \quad \cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=13$, $y=35$
따라서 내 아들의 현재 나이는 13살이다.

1-5 200원짜리 상품을 x개, 400원짜리 상품을 y개, 600원짜리 상품을 z개 산다고 하면
$x+y+z=16 \quad \cdots ㉠$
$200x+400y+600z=6000$
$\therefore x+2y+3z=30 \quad \cdots ㉡$
㉡$-$㉠을 하면 $y+2z=14$
이때 x, y, z는 자연수이므로 순서쌍 (y, z)는
$(2, 6)$, $(4, 5)$, $(6, 4)$, $(8, 3)$, $(10, 2)$, $(12, 1)$
이때 600원짜리 상품을 가능한 많이 사려면 최대 6개 살 수 있으므로 $M=6$
또 200원짜리 상품을 가능한 적게 사려면 $y+z$가 최대이어야 하므로 $y=12$, $z=1$일 때이다.
즉, ㉠에서 $x+12+1=16$이므로 $x=3 \quad \therefore N=3$
$\therefore M+N=6+3=9$

2-1 같은 방향으로 달리면 처음으로 만날 때까지 달린 거리의 차가 운동장의 둘레의 길이와 같고, 서로 반대 방향으로 달리면 처음으로 만날 때까지 달린 거리의 합이 운동장의 둘레의 길이와 같다.
형의 속력을 분속 x m, 동생의 속력을 분속 y m라 하면
$\begin{cases} 10x-10y=1200 \\ 4x+4y=1200 \end{cases} \quad \therefore x=210,\ y=90$
따라서 형의 속력은 분속 210 m, 동생의 속력은 분속 90 m이므로 속력의 비는
$210 : 90=7 : 3$

2-2 기차가 터널이나 다리를 완전히 통과하려면 기차의 머리 부분은 터널이나 다리의 길이와 기차의 길이를 더한 만큼 움직여야 한다.
기차의 속력을 초속 x m, 기차의 길이를 y m라 하면
1 km, 즉 1000 m 길이의 터널을 완전히 통과하는 데 12초가 걸리므로
$1000+y=12x \quad \cdots ㉠$
460 m 길이의 다리를 완전히 통과하는 데 6초가 걸리므로
$460+y=6x \quad \cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=90$, $y=80$
따라서 기차의 속력은 초속 90 m이다.

2-3 지연이가 평소 걷는 속력을 시속 x km, 집에서 학교까지 평소 걸리는 시간을 y시간이라 하면 집에서 학교까지의 거리는 xy km이다.
시속 $(x+0.5)$ km로 걸으면 $\left(y-\frac{8}{60}\right)$시간이 걸리므로
$xy=(x+0.5)\left(y-\frac{8}{60}\right) \quad \cdots ㉠$
시속 $(x-1)$ km로 걸으면 $\left(y+\frac{40}{60}\right)$시간이 걸리므로
$xy=(x-1)\left(y+\frac{40}{60}\right) \quad \cdots ㉡$
㉠에서 $xy=xy-\frac{2}{15}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{15}$
$\therefore 4x-15y=-2 \quad \cdots ㉢$
㉡에서 $xy=xy+\frac{2}{3}x-y-\frac{2}{3}$
$\therefore 2x-3y=2 \quad \cdots ㉣$
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=\frac{2}{3}$
따라서 집에서 학교까지의 거리는 $xy=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$(km)이다.

2-4 A, B, C의 속력을 각각 a, b, c라 하자.
B가 20분 동안 달린 거리와 C가 25분 동안 달린 거리가 서로 같으므로
$20b=25c$
$\therefore c=\frac{4}{5}b \quad \cdots ㉠$
A는 B보다 10분 늦게, 즉 C보다 15분 늦게 출발했으므로 A가 50분 동안 달린 거리와 C가 65분 동안 달린 거리가 서로 같다.
$50a=65c$
$\therefore a=\frac{13}{10}c=\frac{26}{25}b$ ($\because$ ㉠)
A가 출발 후 t분 만에 B를 따라잡는다고 하면
$at=b(t+10)$, $\frac{26}{25}bt=b(t+10)$
$\frac{26}{25}t=t+10 \quad \therefore t=250$
따라서 A는 출발 후 250분 만에 B를 따라잡는다.

3-1 소금물 A, B의 처음의 양을 각각 xg, yg이라 하면

$x+y=600$ $\cdots$㉠

물을 증발시키거나 더 넣어도 소금의 양은 변하지 않으므로

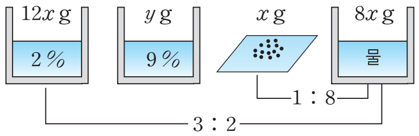
$\frac{11}{100}x+\frac{8}{100}y=\frac{10}{100}\times(600-50+80)$

$\therefore 11x+8y=6300$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=500$, $y=100$

따라서 소금물 A, B의 처음의 양은 각각 500g, 100g이다.

3-2 더 넣은 소금의 양을 xg, 9%의 소금물의 양을 yg이라 하면 더 넣은 물의 양은 $8x$g, 2%의 소금물의 양은 $12x$g이다.



모두 섞으면 1300g이므로

$12x+y+x+8x=1300$ $\quad\therefore 21x+y=1300$ $\cdots$㉠

이때 섞기 전후의 소금의 양은 변하지 않으므로

$\frac{2}{100}\times12x+\frac{9}{100}y+x=\frac{7}{100}\times1300$

$\therefore 124x+9y=9100$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=40$, $y=460$

따라서 2%의 소금물의 양은 $12\times40=480$(g)이다.

3-3 소금물 A, B의 농도를 각각 x%, y%라 하자.

A와 B를 각각 ag씩 섞는다고 하면

$\frac{x}{100}a+\frac{y}{100}a=\frac{7}{100}\times2a$ $\quad\therefore x+y=14$ $\cdots$㉠

A와 B를 각각 $2b$g, bg 섞는다고 하면

$\frac{x}{100}\times2b+\frac{y}{100}b=\frac{6}{100}\times3b$ $\quad\therefore 2x+y=18$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=10$

즉, 소금물 A의 농도는 4%, 소금물 B의 농도는 10%이다. 이때 A와 B를 각각 $3c$g, cg 섞어 농도가 k%인 소금물이 된다고 하면

$\frac{4}{100}\times3c+\frac{10}{100}c=\frac{k}{100}\times4c$

$12+10=4k$ $\quad\therefore k=5.5$

따라서 농도가 5.5%인 소금물이 된다.

4-1 전체 일의 양을 1이라 하고, A, B, C가 하루에 할 수 있는 일의 양을 각각 a, b, c라 하면

$3(a+b+c)=1$ $\quad\therefore a+b+c=\frac{1}{3}$ $\cdots$㉠

$6(a+c)=1$ $\quad\therefore a+c=\frac{1}{6}$ $\cdots$㉡

$4(b+c)=1$ $\quad\therefore b+c=\frac{1}{4}$ $\cdots$㉢

㉠$-$㉢을 하면 $a=\frac{1}{12}$, ㉠$-$㉡을 하면 $b=\frac{1}{6}$

$\therefore a+b=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

따라서 A와 B가 함께 하면 완성하는 데 4일이 걸린다.

4-2 작품 하나를 완성하는 것을 1이라 하고, 은지와 정희가 하루 동안 작업하는 양을 각각 x, y라 하자.

은지가 하루 동안 작업하는 양은 정희가 하루 동안 작업하는 양의 2.5배이므로

$x=\frac{5}{2}y$ $\cdots$㉠

은지와 정희가 3일 동안 함께 작업하고 은지가 혼자 7일을 더 작업하면 작품 하나를 완성할 수 있으므로

$3(x+y)+7x=1$ $\quad\therefore 10x+3y=1$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{5}{56}$, $y=\frac{1}{28}$

따라서 정희가 혼자서 작업하면 작품 하나를 완성하는 데 28일이 걸린다.

4-3 물탱크 전체의 물의 양을 1이라 하자. A 호스와 B 호스로 1분 동안 채울 수 있는 물의 양을 각각 $4x$, x라 하고, C 호스로 1분 동안 사용할 수 있는 물의 양을 y라 하면

$\begin{cases}5(4x-y)=1\\25(x-y)=1\end{cases}$ $\quad\therefore x=\frac{4}{75}$, $y=\frac{1}{75}$

따라서 C 호스를 통하여 물을 75분간 사용할 수 있다.

5-1 작년의 남학생 수를 x명, 여학생 수를 y명이라 하면

$x+y=500$ $\cdots$㉠

변화한 학생 수는

$-\frac{4}{100}x+\frac{6}{100}y=-\frac{1}{100}\times500$

$\therefore 2x-3y=250$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=350$, $y=150$

따라서 올해의 남학생 수는 $350\times\left(1-\frac{4}{100}\right)=336$(명)이고 올해의 여학생 수는 $150\times\left(1+\frac{6}{100}\right)=159$(명)이다.

5-2 1인 기준으로 작년의 숙박비와 비행기 요금을 각각 x원, y원이라 하자.

올해의 숙박비와 비행기 요금의 합계는 작년보다 10% 증가한 231000원이므로

$(x+y)\left(1+\frac{10}{100}\right)=231000$

$\therefore x+y=210000$ $\cdots$㉠

작년에 비해 숙박비는 15% 내렸고, 비행기 요금은 20% 올라서 작년보다 $210000\times\frac{10}{100}=21000$(원) 증가했으므로

$-\frac{15}{100}x+\frac{20}{100}y=21000$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=60000$, $y=150000$

따라서 올해의 숙박비는

$60000\times\left(1-\frac{15}{100}\right)=51000$(원)이고

올해의 비행기 요금은

$150000\times\left(1+\frac{20}{100}\right)=180000$(원)이다.

5-3 A 상품의 원가를 x원, B 상품의 원가를 y원이라 하면

$x+y=34000$ $\cdots$ ㉠

(A 상품의 이익)$=\frac{6}{100}x=\frac{3}{50}x$(원)

(B 상품의 이익)$=\frac{110}{100}y\left(1-\frac{4}{100}\right)-y=\frac{7}{125}y$(원)

두 상품을 합하여 1940원의 이익이 생겼으므로

$\frac{3}{50}x+\frac{7}{125}y=1940$

$\therefore 15x+14y=485000$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=9000,\ y=25000$

따라서 A 상품의 원가는 9000원, B 상품의 원가는 25000원이다.

STEP 2 실전 문제 정복하기

P.68~70

01 전체 학생 수 : 150명, 방 수 : 18개			**02** 297
03 90점	**04** 흰 바둑돌 : 45개, 검은 바둑돌 : 30개		
05 9살	**06** 4개	**07** 145분	
08 다섯 마리 : 7묶음, 세 마리 : 4묶음, 낱개 : 3마리			
09 70장	**10** 8개	**11** 8일	**12** 2 km
13 $\frac{35}{2}$ km	**14** 1 : 9		
15 A비커 : $\frac{160}{9}$ L, B비커 : $\frac{200}{9}$ L			**16** ③

01 전체 학생 수를 x명, 방 수를 y개라 하자.

한 방에 7명씩 배정하면 24명이 남으므로

$x=7y+24$ $\cdots$ ㉠

8명씩 배정한 방 수와 9명씩 배정한 방 수의 비가 2 : 1이므로 $x=8\times\frac{2}{3}y+9\times\frac{1}{3}y$

$\therefore 3x=25y$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=150,\ y=18$

따라서 전체 학생 수는 150명, 방 수는 18개이다.

02 처음 세 자리의 자연수의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 $a,\ b,\ c$라 하면 처음 자연수는 $100a+10b+c$이다.

$(100a+10c+b)-(100a+10b+c)=18$

$\therefore c-b=2$ $\cdots$ ㉠

$(100b+10a+c)-(100a+10b+c)=90$

$\therefore b-a=1$ $\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $c-a=3$

$(100c+10b+a)-(100a+10b+c)$

$=99c-99a=99(c-a)=99\times3=297$

따라서 처음 수에서 백의 자리와 일의 자리의 숫자를 바꾸면 처음 수보다 297만큼 커진다.

03 합격한 응시생 성적의 평균을 x점, 불합격한 응시생 성적의 평균을 y점이라 하자.

전체 응시생 성적의 평균은 $\frac{30x+20y}{50}$점이므로 최저 합격 점수는

$\frac{30x+20y}{50}+1=x-5$ $\quad\therefore x-y=15$

연립방정식 $\begin{cases} x-y=15 \\ 3y=2x+50 \end{cases}$을 풀면 $x=95,\ y=80$

따라서 최저 합격 점수는 합격한 응시생 성적의 평균보다 5점이 낮으므로 $x-5=95-5=90$(점)이다.

04 정삼각형의 한 변에 놓인 바둑돌의 개수를 x개, 정사각형의 한 변에 놓인 바둑돌의 개수를 y개라 하자.

$\begin{cases} (3x-3)+(4y-4)+2=75 \\ x=2y \end{cases}$, 즉 $\begin{cases} 3x+4y=80 \\ x=2y \end{cases}$

$\therefore x=16,\ y=8$

따라서 흰 바둑돌의 개수는 $3\times16-3=45$(개),

검은 바둑돌의 개수는 $(4\times8-4)+2=30$(개)이다.

05 0 또는 한 자리의 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$에 대하여 A의 나이를 $(10a+b)$살, B의 나이를 $(10c+d)$살, C의 나이를 e살이라 하자. (단, $a\neq0,\ c\neq0$)

(나)에서 $|(10a+b)-(10b+a)|+e=63$이므로

$9|a-b|+e=63$ $\quad\therefore e=9(7-|a-b|)$

즉, e는 9의 배수이고, $1\le e<10$이므로 $e=9$

이때 $7-|a-b|=1$이므로 $|a-b|=6$

이를 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 7),\ (2,\ 8),\ (3,\ 9),\ (7,\ 1),\ (8,\ 2),\ (9,\ 3)$이다.

이때 A의 나이는 35살 이하이므로 A는 17살 또는 28살이다.

(다)에서 $|(10c+d)-(10d+c)|-9=63$이므로

$9|c-d|=72,\ |c-d|=8$

이를 만족하는 순서쌍 $(c,\ d)$는 $(1,\ 9),\ (9,\ 1)$이다.

B는 A보다 나이가 적으므로 A는 28살, B는 19살이다.

따라서 A와 B의 나이의 차는 $28-19=9$(살)이다.

06 풀이 과정과 답이 모두 맞은 문항 수를 x개, 답만 맞은 문항 수를 y개, 답이 틀린 문항 수를 z개라 하면

$x+y+z=20$ $\cdots$ ㉠

올해의 점수는 63점이므로

$5x+2y=63$ $\cdots$ ㉡

작년 채점 기준으로 59점이므로

$20+4x-z=59$ $\quad\therefore 4x-z=39$ $\cdots$ ㉢

㉢에서 $z=4x-39$이므로 ㉠에 대입하면

$x+y+4x-39=20$ $\quad\therefore 5x+y=59$ $\cdots$ ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $x=11,\ y=4$

따라서 답만 맞힌 문항의 수는 4개이다.

07 B회사와 C회사의 기본 요금을 x원, C회사의 분당 추가 요금을 y원이라 하자.

165분 통화하면 A회사와 C회사의 요금이 같으므로

$165\times200=x+(165-45)\times y$

$\therefore x+120y=33000$ $\cdots$ ㉠

245분 통화하면 B회사와 C회사의 요금이 같으므로
$x+(245-120)\times 80=x+(245-45)\times y$
$\therefore\ 10000=200y$ $\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=27000,\ y=50$
즉, B회사와 C회사의 기본 요금은 27000원이고 C회사의 분당 추가 요금은 50원이다. 이때 A회사에서 B회사의 기본 요금만큼 쓰려면 최소한 $27000\div 200=135$(분)을 통화해야 한다.
t분 통화했을 때, A, B 두 회사의 요금이 같다고 하면
$t>120$이므로
$200t=27000+80(t-120)$ $\quad\therefore\ t=145$
따라서 145분 통화하면 A회사와 B회사의 요금이 같다.

08 다섯 마리 묶음 수를 x묶음, 세 마리 묶음 수를 y묶음, 낱개로 판 물고기의 수를 z마리라 하면
$5x+3y+z=50$ $\cdots$㉠
모두 팔고 받은 돈이 10700원이므로
$1000x+700y+300z=10700$
$\therefore\ 10x+7y+3z=107$ $\cdots$㉡
㉡$-$㉠$\times 2$를 하면 $y+z=7$
이를 만족하는 순서쌍 $(y,\ z)$는
$(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$이다.
㉠에 대입하여 x의 값을 구하면 $x,\ y,\ z$는 자연수이므로
$x=7,\ y=4,\ z=3$
따라서 다섯 마리 묶음은 7묶음, 세 마리 묶음은 4묶음, 낱개는 3마리를 팔았다.

09 정가로 판 입장권의 수를 x장, 20 % 할인한 가격으로 판 입장권의 수를 y장이라 하면
$x+y=150$ $\cdots$㉠
정가는 $1000n$원, 할인가는 $800n$원이므로
$1000nx+800ny=402000$
$\therefore\ 5nx+4ny=2010$ $\cdots$㉡
㉠에서 $y=150-x$이므로 ㉡에 대입하면
$5nx+4n(150-x)=2010,\ nx+600n=2010$
$\therefore\ n(x+600)=2010$
$2010=1\times 2010=2\times 1005=3\times 670=5\times 402=\cdots$이고
x는 $0<x<150$인 자연수이므로 $600<x+600<750$
$\therefore\ n=3,\ x+600=670$ $\quad\therefore\ x=70$
따라서 정가로 판 입장권은 70장이다.

10 종혁이가 배를 x개, 사과를 y개, 감을 z개 샀다고 하면
$1830x+1560y+650z=37000$
$183x+156y+65z=3700$
$\therefore\ 13(12y+5z)=3700-183x$
$3700-183x$는 13의 배수이므로
$3700-183x$
$=(13\times 284+8)-(13\times 14+1)x$
$=13(284-14x)+(8-x)$
즉, $8-x$가 13의 배수 또는 0이어야 한다.
이때 x는 10 이하의 자연수이므로
$8-x=0$ $\quad\therefore\ x=8$
따라서 종혁이가 산 배의 개수는 8개이다.

11 $1\,\mathrm{km}^2$에 원래 있던 풀의 양을 a, 하루에 자라나는 풀의 양을 b라 하고 소 한 마리가 하루에 먹는 풀의 양을 c라 하자.
넓이가 $2\,\mathrm{km}^2$일 때, 9마리가 16일 만에 풀을 모두 먹으므로
$2a+2\times 16\times b=9\times 16\times c$
$\therefore\ a+16b=72c$ $\cdots$㉠
넓이가 $3\,\mathrm{km}^2$일 때, 18마리가 10일 만에 풀을 모두 먹으므로
$3a+3\times 10\times b=18\times 10\times c$
$\therefore\ a+10b=60c$ $\cdots$㉡
넓이가 $5\,\mathrm{km}^2$일 때, 35마리가 x일 만에 풀을 모두 먹는다고 하면
$5a+5\times x\times b=35\times x\times c$
$\therefore\ a+bx=7cx$ $\cdots$㉢
㉠$-$㉡을 하면 $6b=12c$ $\quad\therefore\ b=2c$
$b=2c$를 ㉡에 대입하면 $a=40c$
즉, $a=40c,\ b=2c$를 ㉢에 대입하면
$40c+2cx=7cx$ $\quad\therefore\ x=8$
따라서 8일 만에 목장의 풀을 모두 먹는다.

12 버스의 속력은 일정하고, 두 모둠이 걷는 속력이 같고 도착 시간도 같으므로 두 모둠이 걸은 거리는 서로 같다. 즉, 각 모둠이 걸어서 간 거리를 $x\,\mathrm{km}$, 버스를 타고 간 거리를 $y\,\mathrm{km}$라 하면 버스가 되돌아간 거리는 $(y-x)\,\mathrm{km}$이다.
학교에서 체육관까지의 거리가 $13\,\mathrm{km}$이므로
$x+y=13$ $\cdots$㉠
2모둠이 A 지점에서 체육관까지 걸어간 시간은 버스가 되돌아가 1모둠을 태우고 다시 체육관까지 가는 데 걸리는 시간과 같으므로
$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y-x}{40}+\dfrac{y}{40}$ $\quad\therefore\ 2y=11x$ $\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=11$
따라서 1모둠이 걸은 거리는 $2\,\mathrm{km}$이다.

13 두 지점 A, B 사이의 거리를 $x\,\mathrm{km}$, 두 지점 B, C 사이의 거리를 $y\,\mathrm{km}$라 하자.
A지점에서 B지점을 지나 C지점으로 갈 때 걸린 시간은
$\dfrac{x}{10+4}+\dfrac{y}{10-5}=\dfrac{x}{14}+\dfrac{y}{5}$(시간)
C지점에서 B지점을 지나 A지점으로 돌아올 때 걸린 시간은 $\dfrac{y}{10+5}+\dfrac{x}{10-4}=\dfrac{y}{15}+\dfrac{x}{6}$(시간)
시간 차이는 20분이므로
$\left(\dfrac{y}{15}+\dfrac{x}{6}\right)-\left(\dfrac{x}{14}+\dfrac{y}{5}\right)=\dfrac{20}{60}$
$\therefore\ 10x-14y=35$ $\cdots$㉠
또 A지점에서 B지점을 지나 C지점까지의 거리와 똑같은 거리를 흐르지 않는 물 위로 갈 때 걸리는 시간은
$\dfrac{x+y}{10}=2\dfrac{45}{60}$ $\quad\therefore\ x+y=\dfrac{55}{2}$ $\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\dfrac{35}{2},\ y=10$
따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $\dfrac{35}{2}\,\mathrm{km}$이다.

14 두 그릇 A, B에 들어 있는 소금물의 농도를 각각 $x\%$, $y\%$라 하고, 처음 A, B에서 퍼낸 같은 양의 소금물의 양을 각각 mg이라 하면 섞은 후 소금과 물의 양의 비가 1 : 4이므로

$\frac{x}{100}m+\frac{y}{100}m=\frac{1}{1+4}\times 2m$

$\therefore\ x+y=40$ …㉠

A그릇에서 $2m$g의 소금물을 더 퍼내어 처음 섞은 소금물에 다시 섞으면 소금과 물의 양의 비가 1 : 3이므로

$\frac{x}{100}\times 3m+\frac{y}{100}m=\frac{1}{1+3}\times 4m$

$\therefore\ 3x+y=100$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=30$, $y=10$

따라서 처음 B그릇에 들어 있는 소금물의 농도는 10 %, 즉 $\frac{1}{10}$이므로 소금과 물의 양의 비는 1 : 9이다.

15 A비커에서 따라낸 액체의 양을 xL, B비커에서 따라낸 액체의 양을 yL라 하자.

A비커에는 알콜이 $\frac{7}{8}x$L, 물이 $\frac{1}{8}x$L 들어 있고,

B비커에는 알콜이 $\frac{9}{10}y$L, 물이 $\frac{1}{10}y$L 들어 있다.

즉, 섞어서 만든 액체의 알콜의 양은 $\left(\frac{7}{8}x+\frac{9}{10}y\right)$L,

물의 양은 $\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{10}y\right)$L이므로

$\left(\frac{7}{8}x+\frac{9}{10}y\right):\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{10}y\right)=8:1$

$\frac{7}{8}x+\frac{9}{10}y=8\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{10}y\right)$ $\therefore\ x=\frac{4}{5}y$

즉, $\begin{cases} x+y=40 \\ x=\frac{4}{5}y \end{cases}$ $\therefore\ x=\frac{160}{9}$, $y=\frac{200}{9}$

따라서 A비커에서 $\frac{160}{9}$L, B비커에서 $\frac{200}{9}$L를 따라냈다.

16 어항에 물을 가득 채웠을 때의 물의 양을 1이라 하고, 세 수도꼭지 A, B, C로 1분에 채울 수 있는 물의 양을 각각 a, b, c라 하면

$p(a+b)=1$ $\therefore\ a+b=\frac{1}{p}$ …㉠

$q(b+c)=1$ $\therefore\ b+c=\frac{1}{q}$ …㉡

$r(c+a)=1$ $\therefore\ c+a=\frac{1}{r}$ …㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(a+b+c)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$

$\therefore\ a+b+c=\frac{pq+qr+rp}{2pqr}=\frac{1}{\frac{2pqr}{pq+qr+rp}}$

따라서 세 수도꼭지 A, B, C를 동시에 틀면 $\frac{2pqr}{pq+qr+rp}$분이 걸린다.

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.71~72

01 여자 회원 : 85명, 남자 회원 : 35명 **02** 19명

03 ④ **04** $\frac{100}{\pi}$ cm **05** 4명

06 $x=9$, $y=2$

07 변 AB 위에서 점 B로부터 24 m 떨어진 지점

01 동아리의 여자 회원 수를 x명, 남자 회원 수를 y명이라 하면 여학생이 센 동아리의 총 회원 수는 자기 자신을 제외한 $(x-1+y)$명이고, 여자 회원 수는 $(x-1)$명이므로

$\frac{x-1}{x-1+y}=\frac{12}{17}$ $\therefore\ 5x-12y=5$ …㉠

남학생이 센 동아리의 총 회원 수는 자기 자신을 제외한 $(x+y-1)$명이고, 여자 회원 수는 x명이므로

$\frac{x}{x+y-1}=\frac{5}{7}$ $\therefore\ 2x-5y=-5$ …㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=85$, $y=35$

따라서 이 동아리의 여자 회원 수와 남자 회원 수는 각각 85명, 35명이다.

02 각 직원이 받은 보너스 금액을 x만 원, 전체 보너스의 총액을 y만 원이라 하면

1번 : $x=10+\frac{1}{20}(y-10)$ …㉠

2번 : $x=20+\frac{1}{20}(y-x-20)$ …㉡

3번 : $x=30+\frac{1}{20}(y-2x-30)$

⋮

n번 : $x=10n+\frac{1}{20}\{y-(n-1)x-10n\}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=190$, $y=3610$

따라서 직원 수는 $\frac{y}{x}=\frac{3610}{190}=19$(명)이다.

03 800원짜리, 2100원짜리, 3200원짜리 우유를 산 고객의 수를 각각 x명, y명, z명이라 하면

$800x+2100y+3200z=14400$

$8x+21y+32z=144$

$8x+32z=144-21y$

$\therefore\ 8(x+4z)=3(48-7y)$ …㉠

8과 3은 서로소이므로 $48-7y$는 8의 배수이다.

이때 y는 0 이상의 정수이므로 $y=0$

$y=0$을 ㉠에 대입하면

$8(x+4z)=3\times 48$

즉, $x+4z=18$이므로

순서쌍 (x, y, z)는 (2, 0, 4), (6, 0, 3), (10, 0, 2), (14, 0, 1), (18, 0, 0)이다.

$\therefore\ x+y+z=6, 9, 12, 15, 18$

따라서 이 날 우유를 사간 고객의 수가 될 수 있는 것은 6명, 9명, 12명, 15명, 18명이다.

04 구의 반지름의 길이를 r cm라 하면 개미가 점 Q에 위치하는 경우는 움직인 거리가

πr cm, $3\pi r$ cm, $5\pi r$ cm, $\cdots$일 때이다.

자연수 m, n에 대하여 두 마리의 개미가 움직인 거리를 각각 $(2m-1)\pi r$ cm, $(2n-1)\pi r$ cm라 하면 두 개미는 점 Q에서 출발한 지 10분 후에 처음으로 만나므로

$$\begin{cases} 50\times10=(2m-1)\pi r & \cdots ㉠ \\ 70\times10=(2n-1)\pi r & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠÷㉡을 하면 $\dfrac{5}{7}=\dfrac{2m-1}{2n-1}$

위의 식을 만족하는 최소의 자연수는 $m=3$, $n=4$이므로

㉠에 $m=3$을 대입하면

$500=5\pi r$

$\therefore\ r=\dfrac{100}{\pi}$

따라서 구의 반지름의 길이는 $\dfrac{100}{\pi}$ cm이다.

05 (가)에서 모자와 양말은 다른 색이므로 난쟁이들의 모습은 아래의 4가지 중 하나이다.

난쟁이의 수(명)	a	b	c	d
모자	빨	빨	초	초
목도리	빨	초	빨	초
양말	초	초	빨	빨

(나)에서 $b+c=8$ $\cdots ㉠$

(다)에서 $a+b=7$ $\cdots ㉡$

(라)에서 $b+d=9$ $\cdots ㉢$

㉠+㉡+㉢을 하면

$(a+b+c+d)+2b=24$

이때 $a+b+c+d=14$이므로

$2b=10$

$\therefore\ b=5$

양말만 빨간색인 난쟁이의 수는 d이므로

㉢에서 $5+d=9$

$\therefore\ d=4$

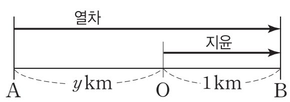
따라서 양말만 빨간색인 난쟁이는 4명이다.

06 열차와 지윤이가 만난 지점을 O, 이때 뒤따라오는 열차의 위치를 A라 하자.

(i) 열차와 지윤이가 같은 방향으로 갈 때,

20분 후의 지윤이의 위치를 B라 하면

$\overline{AB}-\overline{OB}=\overline{OA}$



이때 $\overline{OA}=y$ km, $\overline{OB}=3\times\dfrac{20}{60}=1$(km)이고,

열차의 속력은 시속 x km이므로

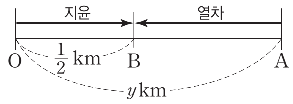
$\dfrac{20}{60}x-1=y$

$\therefore\ x-3y=3$ $\cdots ㉠$

(ii) 열차와 지윤이가 반대 방향으로 갈 때,

10분 후의 지윤이의 위치를 B라 하면

$\overline{OB}+\overline{AB}=\overline{OA}$



$\overline{OA}=y$ km, $\overline{OB}=3\times\dfrac{10}{60}=\dfrac{1}{2}$(km)이고,

열차의 속력은 시속 x km이므로

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{10}{60}x=y$

$\therefore\ x-6y=-3$ $\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=9$, $y=2$

07 형의 속력을 초속 x m, 동생의 속력을 초속 y m라 하면 두 사람이 최초로 만날 때까지 걸린 시간은

$\dfrac{300+192}{x}+10=\dfrac{600+108}{y}+20$ $\cdots ㉠$

최초로 만난 후부터 두 번째로 만날 때까지 걸린 시간은

$\dfrac{108+300+72}{x}+20=\dfrac{192+300+228}{y}+20$ $\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 각각 정리하면

$$\begin{cases} \dfrac{246}{x}-\dfrac{354}{y}=5 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=0 \end{cases}$$

$\dfrac{1}{x}=X$, $\dfrac{1}{y}=Y$라 하면

$$\begin{cases} 246X-354Y=5 \\ 2X-3Y=0 \end{cases}$$

$\therefore\ X=\dfrac{1}{2}$, $Y=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ x=2$, $y=3$

이후 형이 점 B에 도착하는 데 걸리는 시간은

$\dfrac{228+300}{2}+10=274$(초)

동생이 점 B에 도착하는 데 걸리는 시간은

$\dfrac{72+600}{3}+20=244$(초)

즉, 동생이 점 B에 도착했을 때, 형은 변 AB 위를 지나고 있다.

이때 변 AB 위에서 점 B로부터 p m 떨어진 지점에서 두 사람이 세 번째로 만난다고 하면 두 사람이 두 번째 만난 후부터 이 지점에 도착하는 데 걸리는 시간은 같으므로

$\dfrac{228+300-p}{2}+10=\dfrac{72+600+p}{3}+30$

$\therefore\ p=24$

따라서 변 AB 위에서 점 B로부터 24 m 떨어진 지점에서 세 번째로 만난다.

퍼펙트 단원 마무리 P.73~75

01 $(1,\ 2,\ 1),\ (4,\ 1,\ 1)$ **02** ㄴ, ㄷ **03** 4개
04 260 **05** $p=-1,\ q=2,\ r=5,\ s=-2$
06 7 **07** -25 또는 $-\frac{5}{3}$
08 $m=-3,\ n=-25$ **09** $A=426,\ B=-22$
10 $108\,\text{cm}^2$ **11** ③ **12** $a=780,\ b=110$
13 63.75점 **14** 680그루
15 오후 4시 **16** 30 km
17 합금 A : 130 g, 합금 B : 260 g

01 $x+3y+5z=12$에서
(i) $z=1$일 때,
$x+3y+5=12$에서 $x+3y=7$
$y=1$이면 $x+3=7$ $\quad\therefore x=4$
$y=2$이면 $x+6=7$ $\quad\therefore x=1$
$y\geq3$이면 만족하는 자연수 x가 없다.
(ii) $z\geq2$일 때,
만족하는 자연수 $x,\ y$가 없다.
따라서 (i), (ii)에 의해 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는
$(1,\ 2,\ 1),\ (4,\ 1,\ 1)$이다.

02 $\begin{cases} ax-y=a+2 & \cdots ㉠ \\ 2x+y=3a+6 & \cdots ㉡ \end{cases}$에서
㉠+㉡을 하면 $ax+2x=4a+8$
$\therefore (a+2)x=4(a+2)$ $\quad\cdots$ ㉢
ㄱ. $a=1$이면 ㉢에서 $3x=12$ $\quad\therefore x=4$
$x=4$를 ㉡에 대입하여 풀면 $y=1$
ㄴ. $a\neq-2$이면 ㉢에서 $x=4$
$x=4$를 ㉡에 대입하면 $8+y=3a+6$
$\therefore x=4,\ y=3a-2$
ㄷ. $a=-2$이면 ㉢이 $0\times x=0$의 꼴이므로 해가 무수히 많다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 주어진 세 방정식을 각 변끼리 곱하면 $(xyz)^2=xyz$
이때 $xyz\neq0$이므로 $xyz=1$
$xyz=1$에 $xy=z$를 대입하면
$z^2=1$ $\quad\therefore z=1$ 또는 $z=-1$
(i) $z=-1$일 때,
$xy=z,\ yz=x$에 $z=-1$을 대입하면
$xy=-1,\ -y=x$
순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는 $(-1,\ 1,\ -1),\ (1,\ -1,\ -1)$
(ii) $z=1$일 때,
$xy=z,\ yz=x$에 $z=1$을 대입하면 $xy=1,\ y=x$
순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는 $(-1,\ -1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1)$
따라서 (i), (ii)에 의해 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는 4개이다.

04 $\begin{cases} 18x-24y+7z=0 & \cdots ㉠ \\ 2x-3y+z=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠$-$㉡$\times7$을 하면 $4x-3y=0$ $\quad\therefore y=\frac{4}{3}x$
㉠$-$㉡$\times8$을 하면 $2x-z=0$ $\quad\therefore z=2x$
즉, $x:y:z=x:\frac{4}{3}x:2x=3:4:6$이므로
$x=3k,\ y=4k,\ z=6k$(k는 자연수)라 하면 최소공배수는 $12k$이므로 $12k=240$
따라서 $k=20$이므로 $x=60,\ y=80,\ z=120$
$\therefore x+y+z=260$

05 바르게 구한 해가 $x=3,\ y=4$이므로
$3p+4q=5$ $\quad\cdots$ ㉠
$3r+4s=7$ $\quad\cdots$ ㉡
r를 잘못 보고 구한 해가 $x=5,\ y=5$이므로
$5p+5q=5$ $\quad\therefore p+q=1$ $\quad\cdots$ ㉢
p를 잘못 보고 구한 해가 $x=1,\ y=-1$이므로
$r-s=7$ $\quad\cdots$ ㉣
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $p=-1,\ q=2$
㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $r=5,\ s=-2$

06 $\begin{cases} 3xy-x-y=0 & \cdots ㉠ \\ 5yz-y-z=0 & \cdots ㉡ \\ 6xz-x-z=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$
㉠, ㉡, ㉢의 양변을 각각 $xy,\ yz,\ zx$로 나누고 정리하면
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$ $\quad\cdots$ ㉣
$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=5$ $\quad\cdots$ ㉤
$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=6$ $\quad\cdots$ ㉥
㉣+㉤+㉥을 하면 $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=14$
$\therefore \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7$

07 x와 $x+y$의 범위를 각각 나누어 생각한다.
(i) $x\geq0,\ x+y\geq0$일 때,
$\begin{cases} 2x+y=10 \\ x=15 \end{cases}$ $\quad\therefore x=15,\ y=-20$
이때 $x+y\geq0$을 만족하지 않는다.
(ii) $x\geq0,\ x+y<0$일 때,
$\begin{cases} 2x+y=10 \\ x+2y=-15 \end{cases}$ $\quad\therefore x=\frac{35}{3},\ y=-\frac{40}{3}$
$\therefore x+y=-\frac{5}{3}$
(iii) $x<0,\ x+y\geq0$일 때,
$y=10,\ x=15$이므로 $x<0$을 만족하지 않는다.
(iv) $x<0,\ x+y<0$일 때,
$\begin{cases} y=10 \\ x+2y=-15 \end{cases}$ $\quad\therefore x=-35,\ y=10$
$\therefore x+y=-25$
따라서 (i)~(iv)에 의해 $x+y$의 값은 -25 또는 $-\frac{5}{3}$이다.

08 $\begin{cases} x+2y-z=0 & \cdots ㉠ \\ 2x-y+3z=n & \cdots ㉡ \\ x+4y+mz=10 & \cdots ㉢ \end{cases}$ 에서

㉠$\times 3+$㉡을 하면 $5x+5y=n$

㉠$\times m+$㉢을 하면 $(m+1)x+(2m+4)y=10$

즉, 연립방정식 $\begin{cases} 5x+5y=n \\ (m+1)x+(2m+4)y=10 \end{cases}$ 의 해가 무수히 많아야 하므로

$\begin{cases} 5(m+1)x+5(m+1)y=n(m+1) \\ 5(m+1)x+5(2m+4)y=50 \end{cases}$ 에서

$5(m+1)=5(2m+4)$ $\quad \therefore m=-3$

$n(m+1)=50$에서 $n\times(-3+1)=50$ $\quad \therefore n=-25$

09

x	$x+10$	
	$y-10$	y

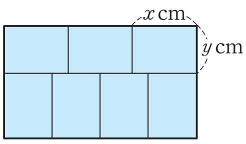
이므로

$x+(x+10)+(y-10)+y=852$

$2x+2y=852$, $x+y=426$ $\quad \therefore A=426$

또 $x+22=y$이므로 $x-y=-22$ $\quad \therefore B=-22$

10 타일 한 장의 가로의 길이를 x cm, 세로의 길이를 y cm라 하면 $3x=4y$ $\cdots ㉠$



또 둘레의 길이가 114 cm이므로

$3x+2(x+y)+4y=114$에서 $5x+6y=114$ $\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=12$, $y=9$

따라서 직사각형 모양의 타일 한 장의 넓이는

$xy=12\times 9=108\,(\text{cm}^2)$이다.

11 만화책 한 권의 두께를 x, 소설책 한 권의 두께를 y라 하면

$Ax+By=Cx+Dy=Ex$

$x>0$이므로 위의 식의 각 변을 x로 나누면

$A+\dfrac{By}{x}=C+\dfrac{Dy}{x}=E$

즉, $\begin{cases} A+\dfrac{By}{x}=C+\dfrac{Dy}{x} & \cdots ㉠ \\ C+\dfrac{Dy}{x}=E & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(B-D)\dfrac{y}{x}=C-A$ $\quad \therefore \dfrac{y}{x}=\dfrac{C-A}{B-D}$

$\dfrac{y}{x}=\dfrac{C-A}{B-D}$를 ㉡에 대입하면

$$E=C+\frac{D(C-A)}{B-D}=\frac{C(B-D)+D(C-A)}{B-D}$$
$$=\frac{BC-CD+CD-AD}{B-D}=\frac{BC-AD}{B-D}$$

12 5월 상수도 요금에서 초과 요금은

$(25-10)b=15b$(원)이므로 $a+15b=2430$ $\cdots ㉠$

$30\,\text{m}^2$까지 사용했을 때의 상수도 요금은

$a+(30-10)b=a+20b$(원)이므로 6월 상수도 요금은

$(a+20b)+(40-30)\times 2b=5180$

$\therefore a+40b=5180$ $\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=780$, $b=110$

13 20대 중반, 20대 후반, 30대 초반의 입사 시험 평균 점수를 각각 x점, y점, z점이라 하면

$\begin{cases} y=x+10 & \cdots ㉠ \\ z=y+15=1.5x & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=1.5x-15$이므로 ㉠과 연립하여 풀면

$x=50$, $y=60$

㉡에서 $z=75$이므로 지원자 전체의 평균 점수는

$\dfrac{50\times 30+60\times 40+75\times 50}{30+40+50}=\dfrac{7650}{120}=63.75$(점)

14 2004년에 키가 140 cm인 나무는 2000년에 심은 A와 2002년에 심은 B이므로

$x+3y=140$ $\cdots ㉠$

2008년에 키가 160 cm인 나무는 2002년에 심은 A와 2005년에 심은 B이므로

$3x+6y=330$ $\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

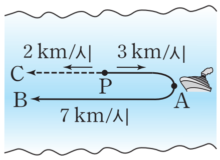
$x=50$, $y=30$

2010년에 키가 2 m 이상인 나무는 2000년에 심은 A와 2000년, 2001년, 2002년, 2003년, 2004년, 2005년에 심은 B이므로

$x+(y+2y+3y+4y+5y+6y)$

$=x+21y=50+630=680$(그루)

15 출발 직전에 낚싯대를 빠뜨린 지점을 P, 배를 돌린 지점을 A라 하자. 낚싯대를 물에 빠뜨렸다가 다시 건져 올릴 때까지 걸린 시간을 x시간, 배를 돌린 시각부터 낚싯대를 건져 올릴 때까지 걸린 시간을 y시간이라 하면



$y=x-\dfrac{1}{2}$ $\cdots ㉠$

이때

(낚싯대가 흘러간 거리)+(배가 30분 동안 올라간 거리)

=(배를 돌린 지점부터 낚싯대를 건져 올린 지점까지의 거리)

인데 강물의 속력이 시속 2 km이므로

(낚싯대가 흘러간 거리)$=\overline{CP}=2x\,(\text{km})$

또 배의 속력이 시속 5 km이므로 배가 강을 거슬러 올라갈 때의 속력은 시속 $5-2=3\,(\text{km})$, 시간은 $\dfrac{1}{2}$시간이다.

즉, 배가 30분 동안 올라간 거리는

$\overline{PA}=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}\,(\text{km})$

이때 배가 강을 따라 내려올 때의 속력은 시속 $5+2=7\,(\text{km})$이므로 $\overline{AB}=7y\,(\text{km})$이다.

$\therefore 2x+\dfrac{3}{2}=7y$ $\cdots ㉡$

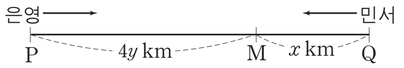
㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=\dfrac{1}{2}$

따라서 낚싯대를 건져 올린 시각은 오후 3시로부터 1시간 후인 오후 4시이다.

16 은영이와 민서의 속력을 각각 시속 x km, 시속 y km라 하고 휴게소의 위치를 M이라 하면

$\overline{PM}=4y\,(\text{km}),\ \overline{QM}=x\,(\text{km})$



은영이와 민서가 휴게소까지 가는 데 걸린 시간이 같으므로

$\dfrac{4y}{x}=\dfrac{x}{y},\ x^2=4y^2$

$\therefore\ x=2y\ (\because\ x>0,\ y>0)$ $\cdots$㉠

또 $\overline{PM}-\overline{QM}=10(\text{km})$이므로

$4y-x=10$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=10,\ y=5$

$\therefore\ \overline{PQ}=4y+x=4\times5+10=30(\text{km})$

따라서 두 도시 P, Q 사이의 거리는 30 km이다.

17 필요한 합금 A의 양을 x g, 합금 B의 양을 y g이라 하면 합금 A에 포함된 구리의 양과 아연의 양은 각각 $\dfrac{1}{2}x$ g씩이고, 합금 B에 포함된 구리의 양은 $\dfrac{3}{4}y$ g, 아연의 양은 $\dfrac{1}{4}y$ g이다.

또 합금 A와 합금 B를 녹여서 만든 합금 390 g에 2 : 1의 비율로 구리와 아연이 포함되어 있으므로 이 합금에 포함된 구리의 양은 $390\times\dfrac{2}{3}=260(\text{g})$,

아연의 양은 $390\times\dfrac{1}{3}=130(\text{g})$이다.

즉, 새로 만든 합금의 구리의 양은

$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}y=260$ $\cdots$㉠

새로 만든 합금의 아연의 양은

$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}y=130$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=130,\ y=260$

따라서 합금 A는 130 g, 합금 B는 260 g이 필요하다.

특목 경시 대비 **논술·구술 도전하기** P.76~77

1 (1) 다리의 수를 반으로 나누면

$94\div2=47$

다리의 수를 반으로 나눈 값에서 머리의 수를 빼면

$47-35=12$

머리의 수에서 토끼의 수를 빼면

$35-12=23$

따라서 토끼의 수는 12마리, 꿩의 수는 23마리이다.

(2) |예시| 토끼와 꿩의 수를 각각 x마리, y마리라 하자.

머리의 수는 $(x+y)$개이므로 $x+y=35$

다리의 수는 $(4x+2y)$개이므로 $4x+2y=94$

다리의 수를 반으로 나누면

$\dfrac{4x+2y}{2}=\dfrac{94}{2}$

$\therefore\ 2x+y=47$

다리의 수를 반으로 나눈 값에서 머리의 수를 빼면

$(2x+y)-(x+y)=47-35$

$\therefore\ x=12$

따라서 토끼의 수는 12마리이다.

머리의 수에서 토끼의 수를 빼면

$(x+y)-x=35-12$

$\therefore\ y=23$

따라서 꿩의 수는 23마리이다.

2 |예시| 각 나라에서의 하루 식비와 관광비를 한국 금액으로 나타내면 다음 표와 같다.

국가	일본	중국	미국	프랑스	호주
환율	1엔 ⇩ 12원	1위안 ⇩ 190원	1달러 ⇩ 1200원	1유로 ⇩ 1500원	1호주달러 ⇩ 1100원
하루 식비 (원)	(707×3) $\times12$ $=25452$	(30×3) $\times190$ $=17100$	(10.25×3) $\times1200$ $=36900$	(6.6×3) $\times1500$ $=29700$	(9×3) $\times1100$ $=29700$
하루 관광비 (원)	2329×12 $=27948$	140×190 $=26600$	37×1200 $=44400$	15.8 $\times1500$ $=23700$	31×1100 $=34100$

중국을 x일, 미국을 y일 동안 여행한다고 계획을 세우면

$x+y=8$ $\cdots$㉠

중국에서 하루 식비와 관광비는 각각 17100원, 26600원이고, 미국에서 하루 식비와 관광비는 각각 36900원, 44400원이므로

$(17100+26600)x+(36900+44400)y=500000$

즉, $437x+813y=5000$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=4,\ y=4$

따라서 중국을 4일, 미국을 4일 동안 여행할 수 있다.

[다른 풀이]

일본을 x일, 호주를 y일 동안 여행한다고 계획을 세우면

$x+y=8$ $\cdots$㉢

일본에서 하루 식비와 관광비는 각각 25452원, 27948원이고, 호주에서 하루 식비와 관광비는 각각 29700원, 34100원이므로

$(25452+27948)x+(29700+34100)y=500000$

즉, $267x+319y=2500$ $\cdots$㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=7$

따라서 일본을 1일, 호주를 7일 동안 여행할 수 있다.

III 부등식

1 일차부등식과 연립부등식

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.82~86

1-1 ③ **1-2** ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅇ **1-3** ①, ④ **2-1** 22

2-2 ⑤ **2-3** -2.9 **3-1** $-\frac{33}{4}<x-\frac{y}{2}<\frac{49}{12}$

3-2 ② **3-3** 3 **4-1** 14 **4-2** 1개 **4-3** 9

4-4 $3\le a<4$ **5-1** $x<\frac{9}{a-b}$ **5-2** ④

5-3 -2 **6-1** $\frac{1}{2}$ **6-2** $x<3$ **6-3** $\frac{5}{6}$

7-1 $-1<x\le 7$ **7-2** $a=-3$, $b=1$ **7-3** 2

8-1 $a\ge 5$ **8-2** $a\le -\frac{9}{2}$ **8-3** 3

9-1 $\frac{3}{2}\le a<3$ **9-2** 1 **9-3** $0\le a<\frac{2}{3}$

10-1 (1) $-4\le x\le 3$ (2) $x<-2$ 또는 $x>8$

(3) $2<x<5$ 또는 $-9<x<-6$

10-2 $x\ge 2$ **10-3** 7개 **10-4** 1

1-1 ③ $-2a>-2b$에서 $a<b$이므로 $a-(-1)<b-(-1)$

④ $\frac{1}{3}a>\frac{1}{3}b$에서 $a>b$이므로 $-3+\frac{a}{2}>-3+\frac{b}{2}$

⑤ $-3+2a<-3+2b$에서 $a<b$이므로

$-2a-1>-2b-1$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

1-2 ㄱ. $a<0$, $b>0$이므로 $a<b$ $\therefore 3a<3b$

ㄴ. $a<b$이므로 $a-b<0$

ㄷ. $a<b$이므로 $-\frac{a}{2}>-\frac{b}{2}$

ㄹ. $a<0$, $b>0$이므로 $\frac{1}{a}<0$, $\frac{1}{b}>0$ $\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

ㅁ. $a<0$, $b>0$, $a+b<0$이므로 $|a|>|b|$

ㅂ. $|a|>|b|$이므로 $-|a|<-|b|$

ㅅ. $a<0$, $b>0$이므로 $ab<0$

ㅇ. $|a|>|b|$이므로 $a^2>b^2$

따라서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅇ이다.

1-3 ① $a=-1$, $b=-2$이면

$-1>-2$이지만 $(-1)^2<(-2)^2$이다.

④ $a=-3$, $b=-1$, $c=-2$이면

$(-3)\times(-2)>(-1)\times(-2)$이지만 $-3<-1$이다.

2-1 $-5\le x<3$의 각 변에 -3을 곱하면 $-9<-3x\le 15$

각 변에 8을 더하면 $-1<-3x+8\le 23$

따라서 $a=-1$, $b=23$이므로 $a+b=22$

2-2 $1<\frac{x-2}{3}<4$에서

각 변에 3을 곱하면 $3<x-2<12$

각 변에 2를 더하면 $5<x<14$

각 변에 -1을 곱하면 $-14<-x<-5$

각 변에 6을 더하면 $-8<6-x<1$

각 변을 2로 나누면 $-4<\frac{6-x}{2}<\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{6-x}{2}$의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

2-3 $2.65\le x-1.3<2.75$이므로

$3.95\le x<4.05$

각 변에 -2를 곱하면 $-8.1<-2x\le -7.9$

각 변에 5를 더하면 $-3.1<-2x+5\le -2.9$

따라서 $-2x+5$의 최댓값은 -2.9이다.

3-1 $-2<\frac{x}{4}<1$에서 $-8<x<4$

$-\frac{1}{2}<3y<\frac{3}{2}$에서 $-\frac{1}{4}<-\frac{y}{2}<\frac{1}{12}$

즉, $-8-\frac{1}{4}<x-\frac{y}{2}<4+\frac{1}{12}$

$\therefore -\frac{33}{4}<x-\frac{y}{2}<\frac{49}{12}$

3-2 $-2\le a<1$, $\frac{1}{2}<b\le 1$이므로

① $-2+\frac{1}{2}<a+b<1+1$ $\therefore -\frac{3}{2}<a+b<2$

② $-2-1\le a-b<1-\frac{1}{2}$ $\therefore -3\le a-b<\frac{1}{2}$

③ $-2\times\frac{1}{2}=-1$, $-2\times 1=-2$, $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$1\times 1=1$이므로 $-2\le ab<1$

④ $(-2)\div\frac{1}{2}=-4$, $(-2)\div 1=-2$, $1\div\frac{1}{2}=2$,

$1\div 1=1$이므로 $-4<\frac{a}{b}<2$

⑤ $0\le a^2\le 4$

따라서 옳은 것은 ②이다.

3-3 $2\le x+y\le 8$, $4\le x-y\le 10$이므로

$2+4\le(x+y)+(x-y)\le 8+10$

$6\le 2x\le 18$ $\therefore 3\le x\le 9$

따라서 x의 최솟값은 3이다.

4-1 $0.7x-1.3<\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$의 양변에 20을 곱하면

$14x-26<15x-30$ $\therefore x>4$

따라서 $a=4$이므로 $a^2-\frac{8}{a}=4^2-\frac{8}{4}=14$

4-2 $\frac{1}{2}(0.4x+5)>1.2x+1$의 양변에 10을 곱하면

$5(0.4x+5)>12x+10$, $2x+25>12x+10$

$-10x>-15$ $\quad\therefore x<\frac{3}{2}$

따라서 부등식을 만족하는 자연수 x는 1의 1개이다.

4-3 $\frac{2x+5}{3}-\frac{5x-3}{4}<-\frac{5}{2}$의 양변에 12를 곱하면

$4(2x+5)-3(5x-3)<-30$

$8x+20-15x+9<-30$, $-7x<-59$ $\quad\therefore x>\frac{59}{7}$

따라서 가장 작은 정수 x의 값은 9이다.

4-4 $3(x-2)-6x\geq 3x-6a$, $-3x-6\geq 3x-6a$

$-6x\geq -6a+6$ $\quad\therefore x\leq a-1$

부등식을 만족하는 자연수 x가 2개이므로 그 자연수는 1, 2이어야 한다.

따라서 $2\leq a-1<3$이므로 $3\leq a<4$이다.

5-1 $ax-5>bx+4$에서 $(a-b)x>9$

이때 $a<b$이므로 $a-b<0$

$(a-b)x>9$의 양변을 $a-b$로 나누면 $x<\frac{9}{a-b}$

5-2 ㄱ. $a>1$이면 $a-1>0$이므로 $a-1$로 주어진 부등식의 양변을 나누면 $x<4$

ㄴ. $a=1$이면 $0\times x<0$이므로 해가 없다.

ㄷ. $a<1$이면 $a-1<0$이므로 $a-1$로 주어진 부등식의 양변을 나누면 $x>4$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5-3 $(a+1)x+1>3x+4a$에서 $(a-2)x>4a-1$

이 부등식의 해가 없으려면 $a-2=0$이고 $4a-1\geq 0$이어야 한다.

이때 $a=2$이면 $4a-1\geq 0$이 성립하므로 $a=2$이다.

$a=2$를 $-2ax-7a<x+1$에 대입하면

$-4x-14<x+1$, $-5x<15$ $\quad\therefore x>-3$

따라서 이 부등식을 만족하는 정수 x의 최솟값은 -2이다.

6-1 $-x+a\leq\frac{4}{5}$에서 $x\geq a-\frac{4}{5}$

이때 x의 최솟값이 $a-\frac{4}{5}$이므로

$a-\frac{4}{5}=-\frac{3}{10}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

6-2 $ax<b$의 해가 $x>\frac{1}{3}$로 부등호의 방향이 바뀌었으므로 $a<0$이다.

$ax<b$에서 $x>\frac{b}{a}$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{1}{3}$

따라서 $a=3b$이고 이때 $b<0$이다.

$a=3b$를 $bx>a$에 대입하면 $bx>3b$

b로 양변을 나누면 구하는 해는 $x<3$

6-3 $(6a-5)x<b$의 해가 $x<-\frac{1}{6}$로 부등호의 방향이 바뀌지 않았으므로 $6a-5>0$이다.

$(6a-5)x<b$에서 $x<\frac{b}{6a-5}$이므로

$\frac{b}{6a-5}=-\frac{1}{6}$, $-6b=6a-5$

$6a+6b=5$ $\quad\therefore a+b=\frac{5}{6}$

7-1 $0.\dot{1}x+1.\dot{2}>0.\dot{2}(4-x)$에서 $\frac{1}{9}x+\frac{11}{9}>\frac{2}{9}(4-x)$

$x+11>8-2x$, $3x>-3$ $\quad\therefore x>-1$

$\frac{x+5}{2}\geq 2(x-4)$에서 $x+5\geq 4x-16$

$3x\leq 21$ $\quad\therefore x\leq 7$

$\therefore -1<x\leq 7$

7-2 $3(x+1)-a\geq -(x-4)$에서 $3x+3-a\geq -x+4$

$4x\geq a+1$ $\quad\therefore x\geq\frac{a+1}{4}$

$\frac{x-2}{2}+1.5>\frac{2x+1}{3}$에서 $3(x-2)+9>2(2x+1)$

$3x-6+9>4x+2$ $\quad\therefore x<1$

이때 연립부등식의 해가 $-\frac{1}{2}\leq x<b$이므로

$\frac{a+1}{4}=-\frac{1}{2}$, $b=1$ $\quad\therefore a=-3$, $b=1$

7-3 $3x+y=6$에서 $y=6-3x$를 $-x<2y\leq 3x$에 대입하면

$-x<2(6-3x)\leq 3x$

$$\therefore\begin{cases}-x<2(6-3x) & \cdots ㉠\\ 2(6-3x)\leq 3x & \cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $5x<12$ $\quad\therefore x<\frac{12}{5}$

㉡에서 $-9x\leq -12$ $\quad\therefore x\geq\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{4}{3}\leq x<\frac{12}{5}$

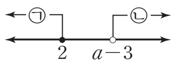
따라서 주어진 부등식을 만족하는 자연수 x의 값은 2이다.

8-1 $2(5-x)\geq 3x$에서 $x\leq 2$ $\quad\cdots ㉠$

$x-a>-3$에서 $x>a-3$ $\quad\cdots ㉡$

연립부등식의 해가 없으므로

$2\leq a-3$ $\quad\therefore a\geq 5$

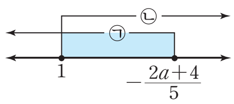


8-2 $\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}(a+2)\geq 2x$에서

$3x-2a-4\geq 8x$ $\quad\therefore x\leq -\frac{2a+4}{5}$ $\quad\cdots ㉠$

$3x+1\geq 2x+2$에서 $x\geq 1$ $\quad\cdots ㉡$

연립부등식의 해가 존재하려면 $1\leq -\frac{2a+4}{5}$



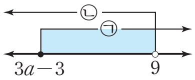
$-2a-4\geq 5$ $\quad\therefore a\leq -\frac{9}{2}$

8-3 $\frac{x+3}{3} \geq a$에서 $x \geq 3a-3$ $\cdots$ ㉠

$\frac{x-1}{3}+\frac{3-x}{4}>\frac{x-2}{6}$에서

$4(x-1)+3(3-x)>2(x-2)$ $\quad\therefore x<9$ $\cdots$ ㉡

두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값이 존재하려면



$3a-3<9 \qquad \therefore a<4$

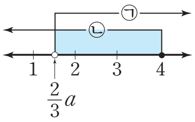
따라서 자연수 a의 최댓값은 3이다.

9-1 $\begin{cases} -x+a<1-\frac{2-x}{2} & \cdots ㉠ \\ 1-\frac{2-x}{2} \leq \frac{x+2}{3} & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $2(-x+a)<2-(2-x)$ $\quad\therefore x>\frac{2}{3}a$

㉡에서 $6-3(2-x) \leq 2(x+2)$ $\quad\therefore x \leq 4$

부등식을 만족하는 정수 x가 3개이므로 정수 x는 2, 3, 4이다.

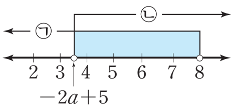


즉, $1 \leq \frac{2}{3}a<2$이므로 $\frac{3}{2} \leq a<3$

9-2 $\frac{2x-1}{3}<5$에서 $x<8$ $\cdots$ ㉠

$\frac{5-x}{2}<a$에서 $x>-2a+5$ $\cdots$ ㉡

두 부등식을 동시에 만족하는 모든 자연수 x의 합이 22이므로 자연수 x는 4, 5, 6, 7이다.



즉, $3 \leq -2a+5<4$이므로

$-2 \leq -2a<-1 \qquad \therefore \frac{1}{2}<a \leq 1$

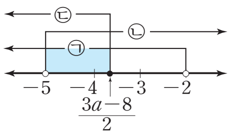
따라서 자연수 a의 값은 1이다.

9-3 $2x-5>5x+1$에서 $x<-2$ $\cdots$ ㉠

$2x+45>5-6x$에서 $x>-5$ $\cdots$ ㉡

$3(x-a) \leq x-8$에서 $x \leq \frac{3a-8}{2}$ $\cdots$ ㉢

연립부등식의 해가 정수를 1개만 포함하므로 그 정수는 -4이다.



즉, $-4 \leq \frac{3a-8}{2}<-3$이므로

$-8 \leq 3a-8<-6 \qquad \therefore 0 \leq a<\frac{2}{3}$

10-1 (1) $|2x+1| \leq 7$에서 $-7 \leq 2x+1 \leq 7$

$-8 \leq 2x \leq 6 \qquad \therefore -4 \leq x \leq 3$

(2) $|x-3|>5$에서 $x-3<-5$ 또는 $x-3>5$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>8$

(3) $4<|x+2|<7$에서

$4<x+2<7$ 또는 $-7<x+2<-4$

$\therefore 2<x<5$ 또는 $-9<x<-6$

10-2 $|x-1| \leq 2x-3$에서

(i) $x \geq 1$일 때, $x-1 \leq 2x-3$ $\quad\therefore x \geq 2$

그런데 $x \geq 1$이므로 $x \geq 2$

(ii) $x<1$일 때, $-(x-1) \leq 2x-3$ $\quad\therefore x \geq \frac{4}{3}$

$x<1$, $x \geq \frac{4}{3}$를 동시에 만족하는 x의 값은 없다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $x \geq 2$이다.

10-3 $||x|-1| \leq 2$에서 $-2 \leq |x|-1 \leq 2$

$\therefore -1 \leq |x| \leq 3$

이때 $|x| \geq 0$이므로 $0 \leq |x| \leq 3$

$\therefore -3 \leq x \leq 3$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

10-4 $|ax-3| \leq 5$에서 $-5 \leq ax-3 \leq 5$

$\therefore -2 \leq ax \leq 8$ $\cdots$ ㉠

(i) $a>0$일 때, ㉠에서 $-\frac{2}{a} \leq x \leq \frac{8}{a}$

$-\frac{2}{a}=-2$, $\frac{8}{a}=8$ $\qquad\therefore a=1$

(ii) $a<0$일 때, ㉠에서 $\frac{8}{a} \leq x \leq -\frac{2}{a}$

$\frac{8}{a}=-2$, $-\frac{2}{a}=8$

이때 두 식을 동시에 만족하는 a의 값은 없다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $a=1$이다.

STEP 2 실전 문제 정복하기

P.87~89

01 ②	**02** 199	**03** $-15 \leq x^2-5y \leq 40$		
04 5	**05** ④	**06** (5, 9)	**07** 2	**08** ②
09 $x<2$	**10** 10개	**11** ④	**12** $\frac{2}{3}<k<\frac{3}{2}$	
13 $-1<a<\frac{3}{2}$		**14** $1 \leq x<6$		
15 $\frac{33}{8}<x \leq 6$		**16** 2	**17** 3	**18** $7 \leq x<11$

01 (가)에서 $a=c+d-b$를 (나)에 대입하면

$(c+d-b)+d>b+c$에서 $2d>2b$ $\quad\therefore d>b$

또 (가)에서 $b=c+d-a$를 (나)에 대입하면

$a+d>(c+d-a)+c$에서 $2a>2c$ $\quad\therefore a>c$

이때 a, b, c, d는 모두 양수이므로 (다)에서 $c>d$

따라서 $a>c>d>b$이다.

02 a가 가장 큰 수가 되기 위해서는 b, c, d도 가장 큰 수이어야 한다.

(라)에서 $d<10$이므로 d는 9 이하의 자연수이다.

(다)에서 $c<2d \leq 2 \times 9=18$이므로 c는 17 이하의 자연수이다.

(나)에서 $b<3c\le 3\times 17=51$이므로 b는 50 이하의 자연수이다.
(가)에서 $a<4b\le 4\times 50=200$이므로 a는 199 이하의 자연수이다.
따라서 a의 최댓값은 199이다.

03 $-2\le x\le 5$, $-3\le y\le 3$이므로
$0\le x^2\le 25$, $-15\le -5y\le 15$
$\therefore\ -15\le x^2-5y\le 40$

04 $4x-2y=5$에서 $y=\dfrac{4x-5}{2}$를 $-x+3y=a$에 대입하면
$-x+3\times\dfrac{4x-5}{2}=a \qquad \therefore\ x=\dfrac{a}{5}+\dfrac{3}{2}$
이때 $1\le\dfrac{a}{5}+\dfrac{3}{2}\le 3$이므로 $10\le 2a+15\le 30$
$-5\le 2a\le 15 \qquad \therefore\ -\dfrac{5}{2}\le a\le\dfrac{15}{2}$
따라서 정수 a의 최댓값은 7, 최솟값은 -2이므로 그 합은 5이다.

05 x, y는 자연수이고 $3x+7y\le 25$이므로 y의 값은 1, 2, 3만 가능하다.
(ⅰ) $y=1$일 때, $3x+7\le 25$에서 $x\le 6$이므로
순서쌍 (x, y)는 $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$의 6개이다.
(ⅱ) $y=2$일 때, $3x+14\le 25$에서 $x\le\dfrac{11}{3}$이므로
순서쌍 (x, y)는 $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$의 3개이다.
(ⅲ) $y=3$일 때, $3x+21\le 25$에서 $x\le\dfrac{4}{3}$이므로
순서쌍 (x, y)는 $(1, 3)$의 1개이다.
따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의해 순서쌍 (x, y)는 10개이다.

06 $y=14-x$를 $0<2x-y<2$에 대입하면
$0<2x-(14-x)<2$, $0<3x-14<2$
$\therefore\ \dfrac{14}{3}<x<\dfrac{16}{3}$
이때 x, y는 자연수이므로 $x=5$, $y=14-5=9$
따라서 구하는 순서쌍 (x, y)는 $(5, 9)$이다.

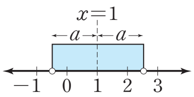
07 $-4<3[x]-2\le 1$, $-2<3[x]\le 3$
즉, $-\dfrac{2}{3}<[x]\le 1$이고 $[x]$는 정수이므로 $[x]=0$, 1
(ⅰ) $[x]=0$일 때, $0\le x<1$
(ⅱ) $[x]=1$일 때, $1\le x<2$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $0\le x<2$이므로 $a=0$, $b=2$
$\therefore\ a+b=0+2=2$

08 $ax-b<bx+a$에서 $(a-b)x<a+b$
ㄱ. $a>b$이면 $a-b>0$이므로 $x<\dfrac{a+b}{a-b}$
ㄴ. $a<b$이면 $a-b<0$이므로 $x>\dfrac{a+b}{a-b}$
ㄷ. $0\times x<a+b$이고 $a+b<0$이므로 해는 없다.
ㄹ. $0\times x<a+b$이고 $a+b>0$이므로 해가 무수히 많다.
따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

09 $(a+b)x-a+3b<0$에서 $(a+b)x<a-3b$
이 부등식의 해가 $x<-1$로 부등호의 방향이 바뀌지 않았으므로 $a+b>0$이다.
$(a+b)x<a-3b$에서 $x<\dfrac{a-3b}{a+b}$이므로
$\dfrac{a-3b}{a+b}=-1$, $a-3b=-a-b \qquad \therefore\ a=b$
이때 $a+b>0$이므로 $a>0$, $b>0$
$a=b$를 부등식 $(a-2b)x+3a-b>0$에 대입하면
$-bx+2b>0$, $-bx>-2b$
이때 $-b<0$이므로 구하는 해는 $x<2$

10 $x-1\ge 0$인 경우와 $x-1<0$인 경우로 나누어 생각한다.
(ⅰ) $x-1\ge 0$일 때, $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{x-1}{3}<2$에서 $2\le x<7$
$\therefore\ x=2, 3, 4, 5, 6$
(ⅱ) $x-1<0$일 때, $\dfrac{1}{3}\le -\dfrac{x-1}{3}<2$에서 $-5<x\le 0$
$\therefore\ x=-4, -3, -2, -1, 0$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 부등식을 만족하는 정수 x는 -4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 6의 10개이다.

11 $|-x+1|<a$에서 $-a<-x+1<a$
$-a-1<-x<a-1 \qquad \therefore\ 1-a<x<1+a$
$1-a<x<1+a$를 만족하는 정수 x가 3개이므로 정수 x는 0, 1, 2이다.



즉, $-1\le 1-a<0$, $2<1+a\le 3$이므로 $1<a\le 2$

12 $\dfrac{3a+2b}{2a+3b}=k$에서 $3a+2b=k(2a+3b)$
$a(3-2k)=b(3k-2) \qquad \therefore\ \dfrac{b}{a}=\dfrac{3-2k}{3k-2}>0$
(ⅰ) $3-2k>0$이고 $3k-2>0$일 때,
$k<\dfrac{3}{2}$이고 $k>\dfrac{2}{3} \qquad \therefore\ \dfrac{2}{3}<k<\dfrac{3}{2}$
(ⅱ) $3-2k<0$이고 $3k-2<0$일 때,
$k>\dfrac{3}{2}$이고 $k<\dfrac{2}{3}$
이를 동시에 만족하는 k의 값은 없다.
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 k의 값의 범위는 $\dfrac{2}{3}<k<\dfrac{3}{2}$

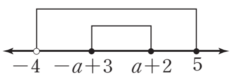
13 $\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ ax+y=3 & \cdots ㉡ \end{cases}$이라 하자.
㉠+㉡을 하면 $(1+a)x=5 \qquad \therefore\ x=\dfrac{5}{a+1}$
$x=\dfrac{5}{a+1}$를 ㉠에 대입하여 풀면 $y=\dfrac{3-2a}{a+1}$
즉, $\dfrac{5}{a+1}>0$, $\dfrac{3-2a}{a+1}>0$이므로
$a+1>0$, $3-2a>0 \qquad \therefore\ -1<a<\dfrac{3}{2}$

14 $2x-a<x+2a$에서 $x<3a$ $\cdots$ ㉠
$2x-a\le 3(x-1)+b$에서 $2x-a\le 3x-3+b$
$x\ge 3-a-b$ $\cdots$ ㉡
연립부등식 ㉠, ㉡의 해가 $-4\le x<6$이므로
$3a=6,\ 3-a-b=-4$
$\therefore\ a=2,\ b=5$
즉, 처음 부등식은 $2x-2<x+4\le 3(x-1)+5$이므로
$$\begin{cases} 2x-2<x+4 & \cdots \text{㉢} \\ x+4\le 3(x-1)+5 & \cdots \text{㉣} \end{cases}$$
㉢에서 $x<6$
㉣에서 $x+4\le 3x-3+5$ $\quad\therefore\ x\ge 1$
따라서 처음 부등식의 해는 $1\le x<6$

15 $2a-3<0$에서 $a<\dfrac{3}{2}$이므로 자연수 a는 1뿐이다.
$a=1$을 대입하면 $1+2x+1\le\dfrac{7}{5}(x+4)<3x-1$
$$\begin{cases} 1+2x+1\le\dfrac{7}{5}(x+4) & \cdots \text{㉠} \\ \dfrac{7}{5}(x+4)<3x-1 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$
㉠에서 $x\le 6$, ㉡에서 $x>\dfrac{33}{8}$
$\therefore\ \dfrac{33}{8}<x\le 6$

16 주어진 세 부등식의 변끼리 각각 더하면
$2(x+y+z)\ge 18-3a$
$x+y+z=6$이므로 $12\ge 18-3a$
$\therefore\ a\ge 2$
따라서 a의 최솟값은 2이다.

17 $$\begin{cases} 2x+1>-7 & \cdots \text{㉠} \\ 5x-7\le 18 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$
㉠에서 $x>-4$, ㉡에서 $x\le 5$
$\therefore\ -4<x\le 5$
$-a+3\le x\le a+2$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $-4<x\le 5$를 만족하므로 오른쪽 그림에서 $-4<-a+3$이고 $a+2\le 5$이어야 한다.



즉, $a<7$이고 $a\le 3$이므로 $a\le 3$이다.
따라서 a의 값 중 가장 큰 정수는 3이다.

18 $\langle x\rangle$는 정수이므로 $1<\left\langle\dfrac{x-4}{2}\right\rangle<4$에서
$\left\langle\dfrac{x-4}{2}\right\rangle=2,\ 3$
(i) $\left\langle\dfrac{x-4}{2}\right\rangle=2$일 때, $2-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x-4}{2}<2+\dfrac{1}{2}$
$3\le x-4<5$ $\quad\therefore\ 7\le x<9$
(ii) $\left\langle\dfrac{x-4}{2}\right\rangle=3$일 때, $3-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{x-4}{2}<3+\dfrac{1}{2}$
$5\le x-4<7$ $\quad\therefore\ 9\le x<11$
따라서 (i), (ii)에 의해 $7\le x<11$이다.

STEP 3 최고 수준 완성하기

P.90~91

01 $\dfrac{a}{d}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{b}$ **02** $3\le z\le 7$ **03** 24개
04 5개 **05** 3개 **06** $0\le xy<\dfrac{27}{2}$
07 $-1<a<2$ **08** $-\dfrac{4}{3}$

01 $0<b<c$에서 $\dfrac{c}{b}>1$
$0<a<b<c<d$에서 $a+c<b+c,\ b+c<b+d$
즉, $a+c<b+d$이므로
$\dfrac{a+c}{b+d}<1$ $\quad\therefore\ \dfrac{a+c}{b+d}<1<\dfrac{c}{b}$
$\dfrac{a+c}{b+d}-\dfrac{a}{d}=\dfrac{(a+c)d-a(b+d)}{(b+d)d}=\dfrac{cd-ab}{(b+d)d}$
이때 (분모)>0, (분자)$=cd-ab>0$이다.
즉, $\dfrac{a+c}{b+d}-\dfrac{a}{d}>0$이므로 $\dfrac{a+c}{b+d}>\dfrac{a}{d}$
$\therefore\ \dfrac{a}{d}<\dfrac{a+c}{b+d}<\dfrac{c}{b}$

02 $|x|\le 1,\ |y|\le 1$이므로 $-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1$
이때 $-2\le x-1\le 0$이므로 $|x-1|=-(x-1)$
$-2\le 2x\le 2,\ -1\le -y\le 1$에서
$1\le 2x-y+4\le 7$이므로 $|2x-y+4|=2x-y+4$
$\therefore\ z=|x+y|+|x-1|+|2x-y+4|$
$=|x+y|-(x-1)+2x-y+4$
$=|x+y|+x-y+5$
(i) $x+y\ge 0$일 때,
$z=x+y+x-y+5=2x+5$
$-2\le 2x\le 2$이므로 $3\le 2x+5\le 7$
$\therefore\ 3\le z\le 7$
(ii) $x+y<0$일 때,
$z=-(x+y)+x-y+5=-2y+5$
$-2\le -2y\le 2$이므로 $3\le -2y+5\le 7$
$\therefore\ 3\le z\le 7$
따라서 (i), (ii)에 의해 z의 값의 범위는 $3\le z\le 7$

03 x가 자연수이므로 $2x+1\ge 3$에서 $\min(2x+1,\ 3)=3$
$\max(x-7,\ 12)+3\le 20$에서 $\max(x-7,\ 12)\le 17$
(i) $x-7<12$, 즉 $x<19$일 때,
$\max(x-7,\ 12)=12\le 17$이므로 항상 성립한다.
$\therefore\ 1\le x<19$
(ii) $x-7=12$, 즉 $x=19$일 때,
$\max(x-7,\ 12)=12\le 17$이므로 항상 성립한다.
$\therefore\ x=19$
(iii) $x-7>12$, 즉 $x>19$일 때,
$\max(x-7,\ 12)\le 17$에서 $x-7\le 17$이므로 $x\le 24$
$\therefore\ 19<x\le 24$
따라서 (i)~(iii)에 의해 $1\le x\le 24$이므로 자연수 x는 24개이다.

04 $\begin{cases}[x]+[y]=7\\ 2[x]-3[y]=-6\end{cases}$을 풀면

$[x]=3$, $[y]=4$

$[x]=3$에서 $3\le x<4$

$\therefore\ 6\le 2x<8$ $\cdots$ ㉠

$[y]=4$에서 $4\le y<5$

$\therefore\ -15<-3y\le -12$ $\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 변끼리 더하면

$-9<2x-3y<-4$

따라서 $[2x-3y]$의 값은 -9, -8, -7, -6, -5의 5개이다.

05 세 자연수 x, y, z에 대하여 $x\le y\le z$이므로

$\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}$

즉, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$에서 $1\le\frac{3}{x}$

$\therefore\ x\le 3$

그런데 $x=1$이면 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$에서 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$으로 조건에 맞지 않다.

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=3$

(i) $x=2$일 때, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ $\cdots$ ㉠

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$에서 $\frac{1}{2}\le\frac{2}{y}$

$\therefore\ y\le 4$

이때 $x\le y$에서 $2\le y$이므로 $2\le y\le 4$

그런데 $y=2$이면 $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{z}=0$으로 조건에 맞지 않다.

$\therefore\ y=3$ 또는 $y=4$

$y=3$을 ㉠에 대입하여 풀면 $z=6$

$y=4$를 ㉠에 대입하여 풀면 $z=4$

(ii) $x=3$일 때, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$ $\cdots$ ㉡

$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}$에서 $\frac{2}{3}\le\frac{2}{y}$

$\therefore\ y\le 3$

이때 $x\le y$에서 $3\le y$이므로 $y=3$

$y=3$을 ㉡에 대입하면 풀면 $z=3$

따라서 (i), (ii)에 의해 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는 $(2,\ 3,\ 6)$, $(2,\ 4,\ 4)$, $(3,\ 3,\ 3)$의 3개이다.

06 $-1<x<3$이고 $3x-2y=0$에서 $y=\frac{3}{2}x$이므로

$-\frac{3}{2}<\frac{3}{2}x<\frac{9}{2}$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<y<\frac{9}{2}$

이때 $3x=2y$이므로

$x>0$, $y>0$ 또는 $x=0$, $y=0$ 또는 $x<0$, $y<0$

(i) $x>0$, $y>0$일 때,

$0<x<3$, $0<y<\frac{9}{2}$이므로

$0<xy<\frac{27}{2}$

(ii) $x=0$, $y=0$일 때, $xy=0$

(iii) $x<0$, $y<0$일 때,

$-1<x<0$, $-\frac{3}{2}<y<0$이므로

$0<xy<\frac{3}{2}$

따라서 (i)~(iii)에 의해 $0\le xy<\frac{27}{2}$

[다른 풀이]

$xy=x\times\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}x^2$

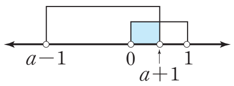
$-1<x<3$이므로 $0\le x^2<9$

$0\le\frac{3}{2}x^2<\frac{27}{2}$ $\quad\therefore\ 0\le xy<\frac{27}{2}$

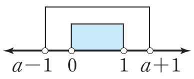
07 $|x-a|<1$에서 $-1<x-a<1$

$\therefore\ a-1<x<a+1$

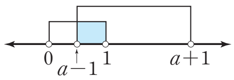
이때 $0<x<1$을 만족하는 어떤 x에 대하여 $a-1<x<a+1$가 성립하므로 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값이 존재하려면 다음 그림과 같아야 한다.



또는



또는



즉, $0<a+1\le 1$ 또는 $a-1<0$, $a+1>1$ 또는 $0\le a-1<1$이다.

따라서 $-1<a\le 0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $1\le a<2$이므로 a의 값의 범위는 $-1<a<2$

08 x의 범위를 나누어 생각한다.

(i) $x\ge 3$일 때,

$(x-3)+2(x+1)\le 5$에서 $x\le 2$

$x\ge 3$과 $x\le 2$를 동시에 만족하는 x의 값은 없다.

(ii) $-1\le x<3$일 때,

$-(x-3)+2(x+1)\le 5$에서 $x\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le 0$

(iii) $x<-1$일 때,

$-(x-3)-2(x+1)\le 5$에서 $x\ge -\frac{4}{3}$

$\therefore\ -\frac{4}{3}\le x<-1$

따라서 (i)~(iii)에 의해 $-\frac{4}{3}\le x\le 0$이므로 x의 최댓값은 0, 최솟값은 $-\frac{4}{3}$이다.

$\therefore\ 0+\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

2 일차부등식과 연립부등식의 활용

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.93~96

1-1 39 **1-2** 13, 15, 17 **1-3** $\frac{3}{7}$
2-1 17500원 **2-2** 23 % **3-1** 100 km
3-2 분속 300 m **3-3** 14 km 이상 19 km 이하
3-4 9시 40분 이후 10시 50분 이전 **4-1** 75g
4-2 $a=5$, $b=\frac{25}{2}$ **4-3** 100 g 이상 300 g 이하
5-1 9개 **5-2** 11개 또는 12개 **5-3** 113 또는 117
5-4 4명 **6-1** $3\text{cm}\le\overline{\text{BE}}\le6\text{cm}$ **6-2** $\frac{9}{2}<x<9$
6-3 $8<b<19$ **7-1** 7개 **7-2** 125표 **7-3** 60명
7-4 8명 **7-5** 3℃ **7-6** $x=3$, $y=5$

1-1 처음 수의 십의 자리의 숫자를 x라 하면 일의 자리의 숫자는 $12-x$이다.
$10(12-x)+x>2\{10x+(12-x)\}$에서
$120-10x+x>18x+24$
$-27x>-96$ $\quad\therefore x<3.5\times\times\times$
이때 x는 자연수이므로 1, 2, 3 중 하나이고 이 중 일의 자리의 숫자는 10 미만의 자연수이어야 하므로 $x=3$이다.
$x=3$이므로 일의 자리의 숫자는 $12-3=9$이다.
따라서 처음 수는 39이다.

1-2 연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면
$$\begin{cases}(x-2)+x+(x+2)>42 & \cdots ㉠\\ 3(x-2)-4<x+(x+2)+5 & \cdots ㉡\end{cases}$$
㉠에서 $x>14$, ㉡에서 $x<17$
$\therefore 14<x<17$
따라서 홀수 x는 15이므로 연속하는 세 홀수는 13, 15, 17이다.

1-3 구하는 분수를 $\frac{b}{a}$ (단, a, b는 서로소인 자연수)라 하면
$\frac{b}{a+2}=\frac{1}{3}$에서 $3b=a+2$ $\quad\therefore a=3b-2$ $\quad\cdots ㉠$
이때 $1<\frac{b+6}{a}<2$이고 $a>0$이므로 $a<b+6<2a$
㉠을 $a<b+6<2a$에 대입하면
$3b-2<b+6<6b-4$ $\quad\therefore 2<b<4$
b는 자연수이므로 $b=3$, ㉠에서 $a=9-2=7$
따라서 $a=7$, $b=3$이므로 구하는 분수는 $\frac{3}{7}$이다.

2-1 정가를 x원이라 하면 정가의 2할을 할인한 가격은 $0.8x$원이고, 원가가 10000원이므로 원가의 4할은 4000원이다.
즉, 원가의 4할 이상의 이익을 얻으려면
$0.8x-10000\ge4000$, $0.8x\ge14000$
$\therefore x\ge17500$
따라서 정가를 최소 17500원으로 정해야 한다.

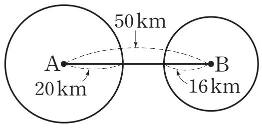
2-2 원가를 a원이라 하면 정가는 $1.3a$원이고, 정가의 x%를 할인한 가격은 $1.3a\left(1-\frac{x}{100}\right)$원이다.
즉, $1.3a\left(1-\frac{x}{100}\right)\ge a$이므로 $1.3-0.013x\ge1$
$1300-13x\ge1000$, $-13x\ge-300$
$\therefore x\le23.0\times\times\times$
따라서 최대 23 %까지 할인할 수 있다.

3-1 헬리콥터는 1시간에 $5\times60=300(\text{km})$의 속력으로 날으므로 헬리콥터가 $x$km 떨어진 곳까지 취재하고 돌아온다고 하면 1시간 안으로 취재를 마쳐야 하므로
$\frac{x}{300}+\frac{1}{3}+\frac{x}{300}\le1$
$\therefore x\le100$
따라서 헬리콥터로 최대 100 km 떨어진 곳까지 취재하고 돌아올 수 있다.

3-2 A지점에서 B지점까지 걸리는 시간은 $\frac{1000}{80}=\frac{25}{2}$(분)
B지점에서 C지점까지 걸리는 시간은 $\frac{30000}{800}=\frac{75}{2}$(분)
C지점에서 D지점까지 분속 xm로 달린다고 하면 걸리는 시간은 $\frac{3000}{x}$(분)
총 걸린 시간이 60분 이하이어야 하므로
$\frac{25}{2}+\frac{75}{2}+\frac{3000}{x}\le60$, $\frac{3000}{x}\le10$
$\therefore x\ge300$
따라서 분속 300 m 이상으로 달려야 한다.

3-3 회사에서 집까지의 거리를 $x$km라 하면 자동차가 시속 60 km로 달리는 거리는 $(x-6)$ km이다.
$\frac{20}{60}\le\frac{6}{30}+\frac{x-6}{60}\le\frac{25}{60}$, $20\le12+x-6\le25$
$\therefore 14\le x\le19$
따라서 14 km 이상 19 km 이하인 범위 내에 있어야 한다.

3-4 준수가 자전거를 탄 시간을 x시간이라 하면 x시간 동안 이동한 거리는 $12x$ km이다.



이때 A방송국을 출발하여 20 km 초과 $(50-16)$ km 미만까지는 방송을 들을 수 없으므로
$20<12x<50-16$
$\therefore 1\frac{40}{60}<x<2\frac{50}{60}$
따라서 출발하여 1시간 40분 초과 2시간 50분 미만 동안 방송을 들을 수 없으므로 방송을 들을 수 없는 시간대는 9시 40분이 지난 후부터 10시 50분이 되기 전까지이다.

4-1 x g의 물을 증발시키고 x g의 설탕을 더 넣는다고 하면 전체 설탕물의 양에는 변화가 없으므로

$$\frac{\frac{20}{100}\times500+x}{500}\times100\geq35$$

$\frac{100+x}{5}\geq35$, $100+x\geq175$ $\quad\therefore\ x\geq75$

따라서 75 g 이상의 물을 증발시켜야 한다.

4-2 10 % 소금물은 300 g 생기므로

$\frac{a}{100}\times100+\frac{b}{100}\times200=\frac{10}{100}\times300$에서

$a+2b=30$ $\quad\therefore\ b=15-\frac{a}{2}$

이때 $2a<b<3a$이므로 $2a<15-\frac{a}{2}<3a$

$\therefore\ 4a<30-a<6a$

$\begin{cases}4a<30-a & \cdots㉠\\30-a<6a & \cdots㉡\end{cases}$

㉠에서 $a<6$, ㉡에서 $a>\frac{30}{7}$ $\quad\therefore\ \frac{30}{7}<a<6$

따라서 a는 정수이므로 $a=5$, $b=\frac{25}{2}$이다.

4-3 2 %의 소금물을 x g 넣었다고 하면 전체 소금물의 양은 $(300+x)$g이다.

$$\frac{4}{100}\times(300+x)\leq\frac{6}{100}\times300+\frac{2}{100}\times x$$
$$\leq\frac{5}{100}\times(300+x)$$

$1200+4x\leq1800+2x\leq1500+5x$

$\begin{cases}1200+4x\leq1800+2x & \cdots㉠\\1800+2x\leq1500+5x & \cdots㉡\end{cases}$

㉠에서 $x\leq300$, ㉡에서 $x\geq100$ $\quad\therefore\ 100\leq x\leq300$

따라서 2 %의 소금물은 100 g 이상 300 g 이하로 넣어야 한다.

5-1 텐트의 개수를 x개라 하면 $7x<80\leq9x$

$\begin{cases}7x<80 & \cdots㉠\\80\leq9x & \cdots㉡\end{cases}$

㉠에서 $x<\frac{80}{7}$, ㉡에서 $x\geq\frac{80}{9}$

$\therefore\ 8.8\times\times\times\leq x<11.4\times\times\times$

따라서 텐트는 최소 9개가 있다.

5-2 의자의 개수를 x개라 하면 학생 수는 $(4x+3)$명이다.

7명씩 앉으면 4개의 의자가 남으므로

$7(x-5)+1\leq4x+3\leq7(x-5)+7$

각 변에서 $7x$를 빼면 $-34\leq-3x+3\leq-28$

$-37\leq-3x\leq-31$ $\quad\therefore\ \frac{31}{3}\leq x\leq\frac{37}{3}$

$\therefore\ 10.3\times\times\times\leq x\leq12.3\times\times\times$

따라서 의자의 개수는 11개 또는 12개이다.

5-3 산악회 회원 수가 a명이므로 사과의 개수는 $b=3a+37$(개)이다.

5개씩 주는 경우 마지막 한 명의 회원에게는 1개 이상 4개 이하로 줄 수 있으므로

$5(a-1)+1\leq3a+37\leq5(a-1)+4$

$\therefore\ 19\leq a\leq20.5$

즉, $a=19$ 또는 $a=20$이다.

(ⅰ) $a=19$일 때,

$b=3\times19+37=94$ $\quad\therefore\ a+b=113$

(ⅱ) $a=20$일 때,

$b=3\times20+37=97$ $\quad\therefore\ a+b=117$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $a+b$의 값은 113 또는 117이다.

5-4 학생 수를 x명이라 하면 목표한 금액은 $(10000x-12500)$원이다.

한 학생이 9500원씩 내면 목표한 금액보다 부족한 금액이 3000원 미만이므로

$0<(10000x-12500)-9500x<3000$

$0<500x-12500<3000$, $12500<500x<15500$

$\therefore\ 25<x<31$

따라서 학생들의 최대 인원수는 30명이고 최소 인원수는 26명이므로 그 차는 4명이다.

6-1 $\overline{BE}=x$ cm라 하면 점 E는 $\overline{BC}$ 위를 움직이므로

$0\leq x\leq6$ $\quad\cdots㉠$

$\triangle AED$

$=$(사다리꼴 ABCD의 넓이)$-\triangle ABE-\triangle CDE$

$=\frac{1}{2}\times(4+6)\times6-\frac{1}{2}\times x\times6-\frac{1}{2}\times(6-x)\times4$

$=18-x\,(cm^2)$

$\triangle AED$의 넓이가 사다리꼴 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이하이어야 하므로 $18-x\leq\frac{1}{2}\times30$에서 $x\geq3$

$\therefore\ 3\leq x\leq6$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ 3\,cm\leq\overline{BE}\leq6\,cm$

6-2 3개의 조각의 길이는 각각 x cm, x cm, $(18-2x)$cm이다.

(ⅰ) 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때,

$\begin{cases}x>18-2x\\x<x+(18-2x)\end{cases}$ $\quad\therefore\ 6<x<9$

(ⅱ) 가장 긴 변의 길이가 $(18-2x)$cm일 때,

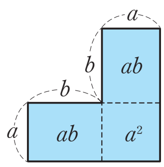
$\begin{cases}18-2x>x\\18-2x<x+x\end{cases}$ $\quad\therefore\ \frac{9}{2}<x<6$

(ⅲ) 3개의 조각의 길이가 같을 때,

$x=18-2x$ $\quad\therefore\ x=6$

따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의해 x의 값의 범위는 $\frac{9}{2}<x<9$

6-3 오른쪽 그림에서 주어진 도형의 넓이는



$a^2+2ab=80$ $\quad\cdots㉠$

이때 $2<a<4$이므로

$4<a^2<16$, $4b<2ab<8b$에서

$4+4b<a^2+2ab<16+8b$ $\quad\cdots㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면 $4+4b<80<16+8b$

$\begin{cases} 4+4b<80 & \cdots ㉢ \\ 80<16+8b & \cdots ㉣ \end{cases}$

㉢에서 $b<19$, ㉣에서 $b>8$

$\therefore 8<b<19$

7-1 필요한 삼각김밥이 x개일 때, A마트에서 사는 것이 더 유리해야 하므로

$800x\left(1-\frac{15}{100}\right)<800(x-1)$

$680x<800x-800 \qquad \therefore x>\frac{20}{3}$

따라서 필요한 삼각김밥이 7개 이상일 때, A마트에서 사는 것이 더 유리하다.

7-2 중간 개표수가 551표이므로 남은 표는 300표이다.
300표 중에서 A 후보에게 투표한 표 수를 x표라 하면 A의 총 득표수는 B가 나머지 $(300-x)$표를 모두 얻었을 때의 B의 총 득표수보다 많아야 한다.
즉, $251+x>200+(300-x)$이므로

$2x>249 \qquad \therefore x>124.5$

따라서 A 후보가 최소 125표 더 얻어야 당선이 확정된다.

7-3 $x(x\geq30)$명이 입장했다고 하면 20명까지는 입장료가 600원이고, $(x-20)$명은 입장료가 300원이다.
입장료의 총합은

$600\times20+300(x-20)=6000+300x$(원)

입장객은 모두 x명이고 입장료의 평균이 400원 이하가 되므로 $\frac{6000+300x}{x}\leq400$

$x>0$이므로 양변에 x를 곱하면

$6000+300x\leq400x$, $6000\leq100x \qquad \therefore x\geq60$

따라서 60명 이상 입장해야 한다.

7-4 일을 완성하는 것을 1이라 하면 고등학생 1명이 하루에 할 수 있는 일의 양은 $\frac{1}{6}$이고, 중학생 1명이 하루에 할 수 있는 일의 양은 $\frac{1}{12}$이다.
이때 이 팀에 중학생이 x명 있다고 하면 고등학생은 $(10-x)$명이므로

$(10-x)\times\frac{1}{6}+\frac{1}{12}x\geq1$

$20-2x+x\geq12 \qquad \therefore x\leq8$

따라서 중학생은 최대 8명까지 포함될 수 있다.

7-5 A도시와 C도시의 평균 기온의 차는 $|x-23|$(℃)이므로

$4+|x-23|\leq6$

(i) $x\geq23$일 때, $4+(x-23)\leq6$에서 $x\leq25$

$\therefore 23\leq x\leq25$

(ii) $x<23$일 때, $4-(x-23)\leq6$에서 $x\geq21$

$\therefore 21\leq x<23$

(i), (ii)에 의해 $21\leq x\leq25$이다.

이때 $-1\leq x-22\leq3$이고, C도시와 D도시의 평균 기온의 차는 $|x-22|$(℃)이므로

$0\leq|x-22|\leq3$

따라서 평균 기온의 차의 최댓값은 3℃이다.

7-6 $0.8x+2.7y\leq16$에서 $8x+27y\leq160 \quad \cdots ㉠$

$400x+600y=4200$에서 $y=7-\frac{2}{3}x \quad \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $8x+27\left(7-\frac{2}{3}x\right)\leq160$

$\therefore x\geq2.9$

또 $y=7-\frac{2}{3}x\geq0$에서 $x\leq10.5$

$\therefore 2.9\leq x\leq10.5$

이때 x와 y는 자연수이므로 순서쌍 (x, y)는
$(3, 5)$, $(6, 3)$, $(9, 1)$ 중 하나이고 $x<y$이므로
$x=3$, $y=5$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.97~98

01 $\frac{2}{29}$ **02** 시속 96 km 이상 시속 120 km 이하
03 $300\leq x\leq420$ **04** 3개 **05** $2<x<18$
06 3000표 **07** 9월 15일 **08** 39 **09** 37명
10 2개 **11** 268개

01 구하는 분수를 $\frac{n}{m}=0.06\times\times\times$ (m, n은 서로소인 자연수)라 하면

$0.06<\frac{n}{m}<0.07$

$\therefore 0.06m<n<0.07m \quad \cdots ㉠$

이때 $20<m<30$이므로

$1.2<0.06m<1.8$, $1.4<0.07m<2.1$

즉, $1.2<n<2.1$이므로 $n=2$

㉠에서 $0.06m<2<0.07m$

$\begin{cases} 0.06m<2 & \cdots ㉡ \\ 2<0.07m & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉡에서 $m<33.3\times\times\times$, ㉢에서 $m>28.5\times\times\times$

$\therefore 28.5\times\times\times<m<33.3\times\times\times$

이때 $20<m<30$이므로 $m=29$

따라서 기약분수 $\frac{n}{m}$은 $\frac{2}{29}$이다.

02 나중 속력을 시속 x km라 하면 120 km의 거리를 처음 속력으로 달릴 때 걸리는 시간과 나중 속력으로 달릴 때 걸리는 시간의 차이가 15분 이상 30분 이하이어야 하므로

$\frac{15}{60}\leq\frac{120}{80}-\frac{120}{x}\leq\frac{30}{60}$, $1\leq\frac{120}{x}\leq\frac{5}{4}$

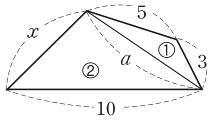
$\frac{4}{5}\leq\frac{x}{120}\leq1 \qquad \therefore 96\leq x\leq120$

따라서 시속 96 km 이상 시속 120 km 이하로 달려야 한다.

03 10 % 설탕물을 x g 더 넣으면 전체 설탕물의 양은
$200+100+x=300+x$(g)
전체 설탕의 양은
$\frac{8}{100}\times200+\frac{5}{100}\times100+\frac{10}{100}\times x=21+\frac{1}{10}x$(g)
설탕물의 농도가 8.5 % 이상 8.75 % 이하이어야 하므로
$\frac{8.5}{100}\times(300+x)\le21+\frac{1}{10}x\le\frac{8.75}{100}\times(300+x)$
$8.5(300+x)\le2100+10x\le8.75(300+x)$
$\begin{cases}8.5(300+x)\le2100+10x & \cdots ㉠\\ 2100+10x\le8.75(300+x) & \cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $x\ge300$, ㉡에서 $x\le420$
$\therefore\ 300\le x\le420$

04 상자의 총 개수를 x개라 하면 야구공의 개수는 $(5x+12)$개이다. 9개씩 넣으면 상자가 4개 남으므로
$9(x-5)+1\le5x+12\le9(x-5)+9$
$\therefore\ 12\le x\le14$
즉, 상자의 개수로 가능한 것은 12개, 13개, 14개이다.
이때 야구공을 5개씩 넣은 상자의 개수를 a개, 야구공을 9개씩 넣은 상자의 개수를 b개라 하면
(i) 상자의 총 개수가 12개일 때,
$\begin{cases}a+b=12\\ 5a+9b=72\end{cases}$
$\therefore\ a=9,\ b=3$
(ii) 상자의 총 개수가 13개일 때,
$\begin{cases}a+b=13\\ 5a+9b=77\end{cases}$
$\therefore\ a=10,\ b=3$
(iii) 상자의 총 개수가 14개일 때,
$\begin{cases}a+b=14\\ 5a+9b=82\end{cases}$
$\therefore\ a=11,\ b=3$
따라서 (i)~(iii)에 의해 9개씩 넣은 상자는 3개이다.

05 다음 그림과 같이 보조선을 그어 그 길이를 a라 하자.



삼각형 ①에서 $a<3+5$, 즉 $a<8$
삼각형 ②에서
(i) 가장 긴 변의 길이가 x일 때, 즉 $x<a+10$
$a<8$이므로 $x<a+10<8+10$
$\therefore\ x<18$
(ii) 가장 긴 변의 길이가 10일 때, 즉 $10<a+x$
$a<8$이므로 $10<a+x<8+x$
$\therefore\ x>2$
따라서 (i), (ii)에 의해 $2<x<18$

06 A, B, C의 예상 득표 수를 각각 a표, b표, c표라 하면
$\frac{1}{3}a\le c\le\frac{1}{2}b\quad\cdots ㉠$
또 $6000\le a+c$이고 ㉠에서 $a\le3c$이므로
$6000\le a+c\le3c+c$
$4c\ge6000\qquad\therefore\ c\ge1500$
이때 ㉠에서 $c\le\frac{1}{2}b$이므로 $1500\le c\le\frac{1}{2}b$
$\frac{1}{2}b\ge1500\qquad\therefore\ b\ge3000$
따라서 B의 최소 예상 득표 수는 3000표이다.

07 세린이가 x월 y일에 태어났다고 하면
$2(5y+30)+x=219\qquad\therefore\ x=159-10y\quad\cdots ㉠$
그런데 $1\le x\le12$이므로 ㉠을 대입하면
$1\le159-10y\le12,\ -158\le-10y\le-147$
$\therefore\ 14.7\le y\le15.8$
이때 y는 자연수이므로 $y=15$
$y=15$를 ㉠에 대입하면 $x=9$
따라서 세린이의 생일은 9월 15일이다.

08 40점 만점으로 문항 수가 30개이므로
$a+b+c=30,\ a+1.5b+2c=40$에서
$b=40-2a,\ c=-10+a$
이때 $b\ge1,\ c\ge1$이므로 $40-2a\ge1,\ -10+a\ge1$
$\therefore\ 11\le a\le19.5$
a는 자연수이므로 $p=11,\ q=19$
또 가능한 a의 값의 개수가 9개이므로 가능한 b의 값의 개수도 9개이다.
$\therefore\ n=9\qquad\therefore\ p+q+n=11+19+9=39$

09 작년의 남녀 직원 수를 각각 $5x$명, $3x$명이라 하면
$5x+3x<600\qquad\therefore\ x<75\quad\cdots ㉠$
올해 뽑은 남자 직원 수와 여자 직원 수를 각각 y명이라 하면
$(5x+y):(3x+y)=11:7$
$7(5x+y)=11(3x+y)\qquad\therefore\ x=2y$
올해 총 직원 수는 650명을 넘었으므로
$8x+2y>650$에서 $9x>650$
$\therefore\ x>72.2\times\times\times\quad\cdots ㉡$
㉠, ㉡에서 $72.2\times\times\times<x<75$이다.
이때 $x=2y$에서 x는 짝수이므로 $x=74$
따라서 $y=37$이므로 올해 뽑은 여자 직원 수는 37명이다.

10 A, B, C상자에 들어 있는 사탕의 개수를 각각 x개, y개, z개라 하면
$\begin{cases}x+y=12 & \cdots ㉠\\ 24<x+z<28 & \cdots ㉡\\ 18<y+z<22 & \cdots ㉢\end{cases}$
㉠에서 $x=12-y$이므로 ㉡에 대입하면
$24<12-y+z<28\qquad\therefore\ -16<y-z<-12\quad\cdots ㉣$
㉢과 ㉣에서 $2<2y<10\qquad\therefore\ 1<y<5$
따라서 B상자에 들어 있는 사탕의 개수의 최솟값은 2개이다.

11 A, B, C세트의 개수를 각각 x개, y개, z개라 하면
치약의 개수는 560개이므로
$2x+2y=560$ $\cdots$ ㉠
샴푸의 개수는 330개이므로
$y+z=330$ $\cdots$ ㉡
비누의 개수는 최대 770개이므로
$4x+2y+3z\le 770$ $\cdots$ ㉢
㉠에서 $x=280-y$이고, ㉡에서 $z=330-y$이므로
㉢에 대입하면 $4(280-y)+2y+3(330-y)\le 770$
$-5y\le -1340$
$\therefore y\ge 268$
따라서 B세트는 최소 268개를 만들 수 있다.

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.99~100

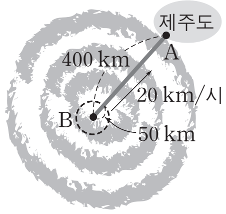
01 21 **02** 2개 **03** 4 L **04** 16시간 **05** 4곡
06 3.65 km **07** 8개

01 세 자연수를 각각 x, y, $z\,(x<y<z)$라 하면
$x+y<x+z<y+z$이고 비가 $5:9:10$이므로
$x+y=5k$, $x+z=9k$, $y+z=10k\ (k\ne 0)$
각 변끼리 더하면 $2(x+y+z)=24k$
$\therefore x+y+z=12k$
$\therefore x=2k$, $y=3k$, $z=7k$
이때 세 수의 평균이 12 이하이므로
$$\frac{2k+3k+7k}{3}\le 12$$
$\therefore k\le 3$
따라서 가장 큰 수 z는 $z=7k\le 21$이므로 그 최댓값은 21이다.

02 한 발매 창구에서 1분 동안 발매하는 표를 x장이라 하면
$3\times 15x=300+15\times 10$ $\quad\therefore x=10$
기다리는 사람들이 8분 이내에 a개의 발매 창구에서 모두 비행기표를 구매하려면
$a\times 10\times 8\ge 300+10\times 8$에서 $80a\ge 380$
$$\therefore a\ge \frac{19}{4}$$
즉, 발매 창구는 5개 이상이 있어야 한다.
따라서 적어도 2개의 발매 창구가 더 추가되어야 한다.

03 1분에 2 L씩 물을 채우면 1시간 안에 항아리에 가득찬다고 생각했으므로 항아리에 채워야 하는 물의 양은
$2\times 60=120\,(\text{L})$이다.
처음 30분 동안 채운 물의 양은 60 L이고, 항아리에 채워진 물의 양은 $120\times\frac{1}{4}=30\,(\text{L})$이므로 30분 동안 새어나간 물의 양은 $60-30=30\,(\text{L})$이다.
즉, 1분에 1 L씩의 물이 새어나간다.
남은 30분 동안 콩쥐가 1분에 채우는 물의 양을 x L라 하면 1분 동안 실제로 항아리에 채워지는 물의 양은 $(x-1)$ L이다.
이때 30분 동안 90 L 이상의 물을 부어야 하므로
$30(x-1)\ge 90$ $\quad\therefore x\ge 4$
따라서 1분에 최소한 4 L의 물을 부어야 한다.

04 오른쪽 그림과 같이 태풍의 중심을 B라 하고 A지점이 현재로부터 t시간 후에 태풍의 세력권에 있으려면



$\overline{\text{AB}}\le$(세력권의 반지름의 길이)
이때 $\overline{\text{AB}}=|400-20t|$이므로
$|400-20t|\le 50+5t$
(i) $400-20t\ge 0$, 즉 $t\le 20$일 때,
$400-20t\le 50+5t$에서 $t\ge 14$
$\therefore 14\le t\le 20$
(ii) $400-20t<0$일 때, 즉 $t>20$일 때,
$-400+20t\le 50+5t$에서 $t\le 30$
$\therefore 20<t\le 30$
(i), (ii)에 의해 $14\le t\le 30$이다.
따라서 A지점은 14시간 후에 태풍의 세력권에 진입하고 30시간 후에 세력권에서 벗어나므로 태풍의 세력권에 총 16시간 동안 들어 가게 된다.

05 처음에 연주하려고 계획한 5분짜리 곡을 x곡, 7분짜리 곡을 y곡이라 하면 쉬는 시간은 $(x+y-1)$분이므로 총 공연 시간은
$5x+7y+x+y-1=85$, $6x+8y=86$
$3x+4y=43$ $\quad\therefore y=\frac{43-3x}{4}$ $\cdots$ ㉠
이때 5분짜리 곡과 7분짜리 곡의 수를 바꾼 공연 시간은
$(7x+5y+x+y-1)$분이므로
$92<7x+5y+x+y-1<96$
$\therefore 93<8x+6y<97$ $\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$$93<8x+\frac{3(43-3x)}{2}<97$$
$186<16x+129-9x<194$, $57<7x<65$
$\therefore 8.1\times\times\times<x<9.2\times\times\times$
즉, x는 자연수이므로 $x=9$
따라서 처음에 연주하려고 계획한 7분짜리 곡의 수는
㉠에서 $y=\frac{43-3\times 9}{4}=4$(곡)이다.

06 택시 요금은 2 km를 초과하는 순간에 100원이 올라가고, 150 m마다 100원씩 올라간다. 택시를 타고 이동하는 거리를 x km라 하면
$0<x-2<0.15$일 때, 초과 요금이 100원,
$0.15\le x-2<0.30$일 때, 초과 요금이 200원,
$0.30\le x-2<0.45$일 때, 초과 요금이 300원, $\cdots$
이므로 초과 요금은 $\left[\frac{x-2}{0.15}+1\right]\times 100$(원)이다.
(단, $x>2$이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

택시가 버스보다 경제적이어야 하므로

$2400+\left[\dfrac{x-2}{0.15}+1\right]\times 100<900\times 4$

$\left[\dfrac{x-2}{0.15}+1\right]\times 100<1200$, $\left[\dfrac{x-2}{0.15}+1\right]<12$

즉, $\left[\dfrac{x-2}{0.15}+1\right]=11$일 때, x가 최대이다.

$11\le\dfrac{x-2}{0.15}+1<12\qquad \therefore\ 3.5\le x<3.65$

따라서 3.65 km 미만까지는 택시가 더 경제적이다.

07 모자가 60개 들어 있는 상자의 개수를 x개, 입장객 수를 y명이라 하면

$$\begin{cases} 2000\le y\le 2050 & \cdots ㉠ \\ 60x<y & \cdots ㉡ \\ \left(60x+40\times\dfrac{1}{4}x\right)-y>y-60x & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉡, ㉢에서 $60x<y<65x$이고, $x>0$이므로

$60<\dfrac{y}{x}<65$에서 $\dfrac{1}{65}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{1}{60}$

$\therefore\ \dfrac{y}{65}<x<\dfrac{y}{60}$

㉠에서 $\dfrac{2000}{65}\le\dfrac{y}{65}<x<\dfrac{y}{60}\le\dfrac{2050}{60}$이므로

$30.7\times\times\times<x<34.1\times\times\times$

$\therefore\ x=31,\ 32,\ 33,\ 34$

이때 x는 4의 배수이어야 하므로 $x=32$이다.

따라서 모자가 40개 들어 있는 상자는 $\dfrac{1}{4}\times 32=8$(개)이다.

퍼펙트 단원 마무리 P.101~103

01 ③ **02** $x=0$, $y=1$ **03** $-5\le y<-4$

04 $15<x+y<16$ **05** 96 **06** $-\dfrac{7}{15}<a<\dfrac{10}{7}$

07 $a=-5$, $b=2$ **08** $2<a\le 3$ **09** ④

10 8 **11** 17 **12** 50 g 이상 100 g 이하

13 B **14** 311쪽 **15** 200

16 사탕 A : 12개, 사탕 B : 8개, 사탕 C : 6개

17 13 km 초과 14.5 km 미만

01 주어진 그림에서 $a<c<0<b$

① $a<c$, $b>0$이므로 $ab<cb$

② $a<c$이므로 $-2a>-2c\qquad \therefore\ 3-2a>3-2c$

③ $a<c$이므로 $2a<2c\qquad \therefore\ 5+2a<5+2c$

④ $a<c$, $-b<0$이므로

$-ab>-cb\qquad \therefore\ 2-ab>2-cb$

⑤ $a<c$, $b>0$이므로 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{b}\qquad \therefore\ \dfrac{a}{b}+1<\dfrac{c}{b}+1$

따라서 옳은 것은 ③이다.

02 $-2\le 2x-1\le 4$에서 $-\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}\quad\cdots ㉠$

$3\le 4-y\le 4$에서 $-1\le -y\le 0\quad\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{3}{2}\le x-y\le\dfrac{5}{2}$

$-\dfrac{1}{2}\le x-y+1\le\dfrac{7}{2}\qquad \therefore\ -\dfrac{1}{8}\le\dfrac{x-y+1}{4}\le\dfrac{7}{8}$

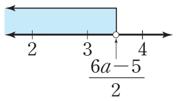
이때 $\dfrac{x-y+1}{4}$은 정수이므로 $\dfrac{x-y+1}{4}=0$

$\therefore\ x-y=-1\quad\cdots ㉢$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족하는 정수 x, y의 값은 $x=0$, $y=1$

03 $\dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{x-2}{3}<\dfrac{a}{2}$, $3(2x-1)-4(x-2)<6a$

$2x+5<6a\qquad \therefore\ x<\dfrac{6a-5}{2}$



부등식을 만족하는 자연수가 3개이므로 그 자연수는 1, 2, 3이다.

즉, $3<\dfrac{6a-5}{2}\le 4$이므로

$6<6a-5\le 8\qquad \therefore\ 11<6a\le 13\quad\cdots ㉠$

$2y+6a=3$에서 $6a=3-2y$이므로 ㉠에 대입하면

$11<3-2y\le 13$, $8<-2y\le 10$

$\therefore\ -5\le y<-4$

04 $[x-2]=[x]-2$이므로

$2[x]+3=3[x-2]+5$에서

$2[x]+3=3[x]-6+5\qquad \therefore\ [x]=4$

x는 정수가 아니므로 $4<x<5$

$y=2[x]+3=2\times 4+3=11$

$\therefore\ 15<x+y<16$

05 x, y, z $(x>y>z)$가 연속하는 세 짝수이므로

$x=y+2$, $z=y-2$

$xy-yz=(y+2)y-y(y-2)=y^2+2y-y^2+2y=4y$

즉, $128\le 4y\le 132$이므로 $32\le y\le 33$

이때 y는 짝수이므로 $y=32$이다.

따라서 $x=34$, $y=32$, $z=30$이므로 $x+y+z=96$

06 $\begin{cases} ax-y=5 & \cdots ㉠ \\ 2x+3ay=7 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$\times 3a+$㉡을 하면 $(3a^2+2)x=15a+7$

$\therefore\ x=\dfrac{15a+7}{3a^2+2}$

㉠$\times 2-$㉡$\times a$를 하면 $(-2-3a^2)y=10-7a$

$\therefore\ y=\dfrac{7a-10}{3a^2+2}$

이때 점 $(x,\ y)$가 제4사분면 위의 점이므로 $x>0$, $y<0$

즉, $\dfrac{15a+7}{3a^2+2}>0\quad\cdots ㉢$, $\dfrac{7a-10}{3a^2+2}<0\quad\cdots ㉣$

$3a^2+2>0$이므로

㉢에서 $15a+7>0$, ㉣에서 $7a-10<0$

따라서 $-\dfrac{7}{15}<a<\dfrac{10}{7}$이다.

07 (ⅰ) $a+2b>0$일 때,

$\frac{2a+5b-5}{a+2b}<x<\frac{a+b-1}{a+2b}$에서

$\frac{2a+5b-5}{a+2b}=4$, $\frac{a+b-1}{a+2b}=5$이므로

연립방정식 $\begin{cases}2a+3b=-5\\4a+9b=-1\end{cases}$을 풀면 $a=-7$, $b=3$

이때 $a+2b=-7+2\times3=-1$이므로

$a+2b>0$을 만족하지 않는다.

(ⅱ) $a+2b<0$일 때,

$\frac{a+b-1}{a+2b}<x<\frac{2a+5b-5}{a+2b}$에서

$\frac{a+b-1}{a+2b}=4$, $\frac{2a+5b-5}{a+2b}=5$이므로

연립방정식 $\begin{cases}3a+7b=-1\\3a+5b=-5\end{cases}$를 풀면 $a=-5$, $b=2$

이때 $a+2b=-5+2\times2=-1$이므로

$a+2b<0$을 만족한다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $a=-5$, $b=2$

08 $2x+3<x+2a$에서 $x<2a-3$ $\cdots$ ㉠

$ax+2a\geq 2x+a^2$에서 $(a-2)x\geq a(a-2)$ $\cdots$ ㉡

(ⅰ) $a>2$일 때,

㉡에서 $x\geq a$이므로 ㉠과의 공통 범위가 존재하지 않으려면 $a\geq 2a-3$, 즉 $a\leq 3$

$\therefore 2<a\leq 3$

(ⅱ) $a=2$일 때,

㉡에서 $0\times x\geq 0$이므로 연립부등식의 해는 무수히 많다.

$\therefore a\neq 2$

(ⅲ) $a<2$일 때,

㉡에서 $x\leq a$이므로 a의 값에 관계없이 연립부등식의 해는 존재한다.

따라서 (ⅰ)~(ⅲ)에 의해 연립부등식의 해가 존재하지 않기 위한 상수 a의 값의 범위는 $2<a\leq 3$

09 $|2x-2|<k+2$에서 $-k-2<2x-2<k+2$

$-k<2x<k+4$ $\quad\therefore -\frac{k}{2}<x<\frac{k+4}{2}$

이 부등식의 해가 존재하려면 $-\frac{k}{2}<\frac{k+4}{2}$이어야 하므로

$-k<k+4$ $\quad\therefore k>-2$

10 구하는 기약분수를 $\frac{n}{m}$(m, n은 서로소인 자연수)이라 하면

$\frac{n+x}{mx}=\frac{n}{m}$, $m(n+x)=mnx$

$n+x=nx$, $n(1-x)=-x$ $\quad\therefore n=\frac{x}{x-1}$

이때 n이 자연수이므로 $x=2$, $n=2$이다.

$\frac{1}{3}<\frac{2}{m}<1$에서 $\frac{2}{6}<\frac{2}{m}<\frac{2}{2}$

분모 m과 분자 2는 서로소이므로 $m=3$, 5

따라서 분모의 합은 $3+5=8$이다.

11 e가 최대이려면 b, c, d가 가능한 작아야 한다.

(가), (나)에 의해 $b=2$, $c=3$, $d=4$

(다)에서 $e=20-(1+2+3+4)=10$

즉, e의 최댓값은 10이다.

또 e가 최소이려면 b, c, d가 가능한 커야 한다.

(나)에서 $d\leq e-1$, $c\leq d-1\leq e-2$,

$b\leq c-1\leq d-2\leq e-3$

(다)에서

$20=a+b+c+d+e$

$\leq 1+(e-3)+(e-2)+(e-1)+e$

$\therefore e\geq\frac{25}{4}$

즉, e의 최솟값은 7이다.

따라서 e의 최댓값과 최솟값의 합은 $10+7=17$이다.

12 섭취해야 하는 식품 A의 양을 xg이라 하면

식품 B의 양은 $(150-x)$g이다.

열량을 300 kcal 이상 얻으려면

$\frac{180}{100}x+\frac{240}{100}(150-x)\geq 300$ $\quad\therefore x\leq 100$

단백질을 15 g 이상 얻으려면

$\frac{12}{100}x+\frac{9}{100}(150-x)\geq 15$ $\quad\therefore x\geq 50$

따라서 $50\leq x\leq 100$이므로 식품 A는 50 g 이상 100 g 이하 섭취해야 한다.

13 6개의 동전 A, B, C, D, E, F의 무게를 각각 a, b, c, d, e, f라 하면

$\begin{cases}a+b<c+d & \cdots ㉠\\b+c<e+f & \cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 A, B, C, D 동전 중 무게가 다른 것이 있으므로 두 동전 E, F의 무게는 같다.

마찬가지 방법으로 ㉡에서 두 동전 A, D의 무게는 같다.

이때 $a=d$이므로 ㉠에서 $b<c$이다.

따라서 가벼운 동전은 B이다.

14 책의 전체 쪽수를 x쪽이라 하자.

하루에 13쪽씩 읽으면 24일이 채 다 걸리지 않으므로

$\frac{x}{13}<24$, 즉 $x<312$ $\cdots$ ㉠

첫날 20쪽을 읽고 그 다음 날부터 10쪽씩 읽으면 30일보다 더 걸리므로

$1+\frac{x-20}{10}>30$, 즉 $x>310$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $310<x<312$

따라서 x는 자연수이므로 책의 전체 쪽수는 311쪽이다.

15 사장으로부터 받은 점수는

$100\times\frac{30}{100}+75\times\frac{40}{100}+x\times\frac{30}{100}=60+0.3x$(점)

부장으로부터 받은 점수는

$85\times\frac{40}{100}+y\times\frac{20}{100}+90\times\frac{40}{100}=70+0.2y$(점)

최종 점수가 90점 이상이어야 하므로

$\frac{2}{5}(60+0.3x)+\frac{3}{5}(70+0.2y)\geq 90$

$24+0.12x+42+0.12y\geq 90$, $0.12(x+y)\geq 24$

$\therefore\ x+y\geq 200$

따라서 $x+y$의 최솟값은 200이다.

16 사탕 A, B, C의 개수를 각각 x개, y개, z개라 하면

$$\begin{cases} x+y+z=26 & \cdots ㉠ \\ 4x+2y+z=70 & \cdots ㉡ \\ x>y>z & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉡$-$㉠을 하면 $3x+y=44$ $\quad\therefore\ x=\frac{44-y}{3}$ $\cdots$㉣

㉠$\times 4-$㉡을 하면 $2y+3z=34$

$\therefore\ z=\frac{34-2y}{3}$ $\cdots$㉤

㉣, ㉤을 ㉢에 대입하면

$\frac{44-y}{3}>y>\frac{34-2y}{3}$에서 $34-2y<3y<44-y$

$34-2y<3y$에서 $y>6.8$, $3y<44-y$에서 $y<11$

즉, $6.8<y<11$이고 y는 자연수이므로 y의 값은 7, 8, 9, 10이다.

$y=7$일 때, x, z가 정수가 아니다.

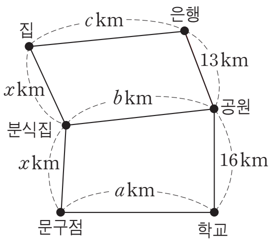
$y=8$일 때, $x=12$, $z=6$

$y=9$일 때, x, z가 정수가 아니다.

$y=10$일 때, x, z가 정수가 아니다.

따라서 $x=12$, $y=8$, $z=6$이므로 사탕 A는 12개, 사탕 B는 8개, 사탕 C는 6개 들어 있다.

17 다음 그림과 같이 a, b, c, x를 정하자.



은행에서 문구점까지 가는 세 경우의 거리에서

$13+16+a=13+b+x=c+x+x$이므로

$b=16+a-x$ $\cdots$㉠

$c=29+a-2x$ $\cdots$㉡

또 학교에서 집으로 가는 세 경우의 거리에서

$a+2x<29+c<16+b+x$

㉡을 $a+2x<29+c$에 대입하면

$a+2x<29+(29+a-2x)$ $\quad\therefore\ x<14.5$

㉠, ㉡을 $29+c<16+b+x$에 각각 대입하면

$29+(29+a-2x)<16+(16+a-x)+x$

$\therefore\ x>13$

$\therefore\ 13<x<14.5$

따라서 집에서 분식집까지의 거리의 범위는 13 km 초과 14.5 km 미만이다.

특목 경시 대비 **논술·구술 도전하기** P.104~105

1 |예시| 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$는 $A<B$이고 $A<C$이므로

$A<B<C$ 또는 $A<B\leq C$ 또는 $A<C<B$ 또는 $A<C\leq B$를 의미한다.

즉, 부등식 $A<B<C$의 해와 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ A<C \end{cases}$의 해는 다르다.

마찬가지로 연립부등식 $\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$는 $A<C$이고 $B<C$이므로

$A<B<C$ 또는 $A\leq B<C$ 또는 $B<A<C$ 또는 $B\leq A<C$를 의미한다.

즉, 부등식 $A<B<C$의 해와 연립부등식 $\begin{cases} A<C \\ B<C \end{cases}$의 해는 다르다.

연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$는 $A<B$이고 $B<C$이므로

$A<B<C$를 의미한다.

따라서 부등식 $A<B<C$와 해가 같은 연립부등식은 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$뿐이다.

예를 들어 부등식 $-x<x-2<4-2x$를 해가 일치하지 않는 두 가지 형태로 나타내고 그 해를 구하면 다음과 같다.

(i) $\begin{cases} -x<x-2 \\ -x<4-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x<-2 \\ x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<4 \end{cases}$

$\therefore\ 1<x<4$

$1<x<4$를 만족하는 $x=2$를

부등식 $-x<x-2<4-2x$에 대입하면

$-2<0<0$이므로 성립하지 않는다.

(ii) $\begin{cases} -x<4-2x \\ x-2<4-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ 3x<6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4 \\ x<2 \end{cases}$

$\therefore\ x<2$

$x<2$를 만족하는 $x=0$을

부등식 $-x<x-2<4-2x$에 대입하면

$0<-2<4$이므로 성립하지 않는다.

2 |예시| 1통화를 3분으로 할 때, 일반 가정집에서 한 달에 평균 x통화를 한다고 하면

요금 제도 변경 전의 통화 요금은 $4000+45x$(원)

요금 제도 변경 후의 통화 요금은 $5200+39x$(원)

이때 변경 후의 통화 요금이 더 유리하려면

$4000+45x>5200+39x$

$6x>1200$ $\quad\therefore\ x>200$

즉, 한 달에 평균 200통화(600분)를 초과하여야 변경 후의 통화 요금 제도가 더 유리하다.

그러나 휴대폰 보급이 보편화되면서 일반 가정에서 사용하는 전화의 통화량은 급격히 줄어들고 있으므로 변경된 요금 제도는 한 달 통화량이 평균 200통화가 안 되는 일반 가정 가입자에게 더 불리할 수밖에 없다.

IV 일차함수

1 일차함수와 그 그래프

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.111~115

1-1 ②, ⑤	**1-2** 3	**1-3** $a=0,\ b\neq 4$		
2-1 4	**2-2** $\left(\frac{11}{2},\ \frac{11}{2}\right)$		**2-3** 10	
3-1 -5	**3-2** $\frac{2}{3}$	**3-3** 27	**3-4** $\frac{13}{4}$	**4-1** 1
4-2 -1	**4-3** $\frac{9}{4}$	**4-4** -15	**5-1** -2	
5-2 54	**6-1** 1	**6-2** $ac>0$	**6-3** 제 3 사분면	
7-1 8	**7-2** -1	**7-3** $\frac{8}{3}$	**7-4** $\frac{4}{3}$	
7-5 $-\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ 1$		**8-1** $y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$		**8-2** $\frac{1}{2}$
8-3 $a=-2,\ b=4,\ k=-6$			**8-4** $y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$	
8-5 $y=-\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}$		**8-6** $y=x+1$		**9-1** $\frac{50}{3}$H
9-2 3분				
9-3 (1) $y=\begin{cases}-120x+360 & (0\leq x<3)\\ 120x-360 & (3\leq x\leq 15)\end{cases}$			(2) 13분	

1-1 ① $y=\frac{x(x-3)}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$: 일차함수가 아니다.
② $y=2(x+4)=2x+8$: 일차함수이다.
③ $y=\pi\times(2x)^2=4\pi x^2$: 일차함수가 아니다.
④ $y=\frac{10}{x}$: 일차함수가 아니다.
⑤ $y=30-0.1x$: 일차함수이다.
따라서 일차함수인 것은 ②, ⑤이다.

1-2 $f(2)=3$에서 $2(a+1)+(a^2-2a+1)=3$
$a^2+3=3,\ a^2=0$ $\quad\therefore a=0$
즉, $f(x)=x+1$이므로 $f(1)+2f(4)=3f(b)$에서
$(1+1)+2\times(4+1)=3(b+1)$
$3b=9$ $\quad\therefore b=3$

1-3 $y=x(ax-4)+bx-c$에서 $y=ax^2+(b-4)x-c$
일차함수가 되려면 $a=0,\ b-4\neq 0$이어야 한다.
따라서 구하는 조건은 $a=0,\ b\neq 4$이다.

2-1 $y=2ax+5$의 그래프를 y축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=2ax+5-7$
즉, $y=2ax-2$
$y=2ax-2$와 $y=4x+b$의 그래프가 겹쳐지므로
$2a=4,\ -2=b$ $\quad\therefore a=2,\ b=-2$
$\therefore a-b=4$

2-2 일차함수 $y=3x+1$의 그래프가 점 $(-a,\ a)$를 지나므로
$a=-3a+1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{4}$
$y=3x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{a}$만큼, 즉 4만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=3(x-4)+1$ $\quad\therefore y=3x-11$
$y=3x-11$의 그래프가 점 $(b,\ b)$를 지난다고 하면
$b=3b-11,\ 2b=11$ $\quad\therefore b=\frac{11}{2}$
따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{11}{2},\ \frac{11}{2}\right)$이다.

2-3 주어진 규칙은 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이므로 $y=ax+b$의 그래프를 주어진 규칙으로 옮기면 함수의 식은
$y=a(x-2)+b-3$
즉, $y=ax-2a+b-3$
이 함수의 그래프가 $y=4x-5$의 그래프와 일치하므로
$a=4,\ -2a+b-3=-5$ $\quad\therefore a=4,\ b=6$
$\therefore a+b=10$

3-1 일차함수 $y=2x-b$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=2x-b-2$
x절편이 a이므로 $0=2a-b-2$에서
$2a-b=2$ $\quad\cdots$ ㉠
y절편이 $2a+4$이므로 $-b-2=2a+4$에서
$2a+b=-6$ $\quad\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-4$
$\therefore a+b=-5$

3-2 ㉠과 ㉡의 그래프는 y축에서 만나므로 y절편이 같다.
$\therefore a=-3$
즉, ㉡의 그래프의 함수의 식은 $y=3x-3$
또 ㉡과 ㉢의 그래프는 x축에서 만나므로 x절편이 같다.
㉡의 $y=3x-3$에서 x절편은 1이고,
㉢의 $y=bx-2$에서 x절편은 $\frac{2}{b}$이므로
$\frac{2}{b}=1$에서 $b=2$
따라서 $y=ax+b$, 즉 $y=-3x+2$의 그래프의 x절편은 $\frac{2}{3}$이다.

3-3 $y=x+6$에서
$y=0$일 때 $x=-6$이므로 $\mathrm{A}(-6,\ 0)$
$x=0$일 때 $y=6$이므로 $\mathrm{C}(0,\ 6)$
$y=-2x+6$에서 $y=0$일 때 $x=3$이므로 $\mathrm{B}(3,\ 0)$
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=9,\ \overline{\mathrm{OC}}=6$이므로
$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\times 9\times 6=27$

3-4 $y=ax-5$의 그래프의 x절편은 $-\frac{-5}{a}=\frac{5}{a}$,

$y=2ax+3$의 그래프의 x절편은 $-\frac{3}{2a}$이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{5}{a},\ 0\right)$, 점 B의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2a},\ 0\right)$

이때 $\frac{5}{a}>0,\ -\frac{3}{2a}<0$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5}{a}-\left(-\frac{3}{2a}\right)=\frac{13}{2a}=2 \qquad \therefore\ a=\frac{13}{4}$

4-1 x절편이 -4, y절편이 a인 직선의 기울기는 $-\frac{a}{-4}=\frac{a}{4}$

두 점 $(4,\ 2)$, $(8,\ 3)$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-2}{8-4}=\frac{1}{4}$

즉, $\frac{a}{4}=\frac{1}{4}$이므로 $a=1$

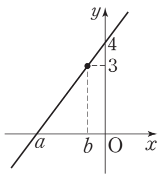
4-2 세 점이 삼각형을 이루지 않으므로 이 세 점은 한 직선 위에 있다.

즉, 두 점 $(1,\ 2)$, $(-1,\ -a+1)$을 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ a+3)$을 지나는 직선의 기울기가 같으므로 $\frac{-a+1-2}{-1-1}=\frac{a+3-2}{2-1}$

$\frac{a+1}{2}=a+1 \qquad \therefore\ a=-1$

4-3 $a<0$이므로 두 점 $(0,\ 4)$, $(a,\ 0)$을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같다.

이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 6이므로



$\frac{1}{2}\times(-a)\times4=6 \qquad \therefore\ a=-3$

세 점 $(0,\ 4)$, $(a,\ 0)$, $(b,\ 3)$이 한 직선 위에 있으므로

$\frac{0-4}{a-0}=\frac{3-4}{b-0}$, $a=4b \qquad \therefore\ b=-\frac{3}{4}$

$\therefore\ b-a=-\frac{3}{4}-(-3)=\frac{9}{4}$

4-4 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 3만큼 증가할 때 y의 값은 k만큼 증가하므로 기울기가 $\frac{k}{3}$이다.

$f(p)-f(q)=5q-5p$에서 $f(p)-f(q)=-5(p-q)$

$\therefore\ \frac{f(p)-f(q)}{p-q}=-5$

즉, $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 -5이므로

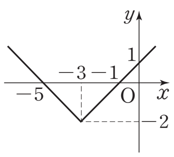
$\frac{k}{3}=-5 \qquad \therefore\ k=-15$

5-1 $y=|x+3|-2$에 대하여

(i) $x\geq-3$일 때, $y=x+3-2=x+1$

(ii) $x<-3$일 때, $y=-(x+3)-2=-x-5$

따라서 $y=|x+3|-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 y의 최솟값은 -2이다.

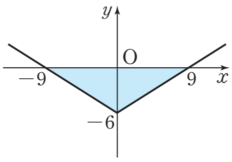


5-2 $y=\frac{2}{3}|x|-6$에 대하여

(i) $x\geq0$일 때, $y=\frac{2}{3}x-6$

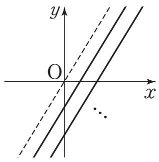
(ii) $x<0$일 때, $y=-\frac{2}{3}x-6$

따라서 $y=\frac{2}{3}|x|-6$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times18\times6=54$

6-1 $y=(2a+1)x+a-1$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으므로 오른쪽 그림과 같이 (기울기)>0, (y절편)≤0이어야 한다.



즉, $2a+1>0$, $a-1\leq0$이므로

$-\frac{1}{2}<a\leq1$

따라서 a의 최댓값은 1이다.

6-2 주어진 그래프의 기울기는 음수, y절편은 양수이다.

$y=\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$에서 $\frac{a}{b}<0,\ -\frac{c}{b}>0$

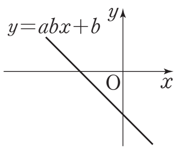
즉, $\frac{a}{b}<0,\ \frac{c}{b}<0$이므로

a와 b의 부호는 다르고 b와 c의 부호도 다르므로 a와 c의 부호는 같다.

$\therefore\ ac>0$

6-3 $y=abx+b$가 일차함수이므로 $ab\neq0$

$y=abx+b$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으므로 오른쪽 그림과 같이 (기울기)<0, (y절편)≤0이다.



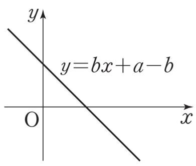
즉, $ab<0$, $b\leq0$이므로

$a>0$, $b<0$ ($\because\ ab\neq0$)

이때 $a-b>0$이므로

$y=bx+a-b$의 그래프의 기울기는 음수이고, y절편은 양수이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 제3사분면을 지나지 않는다.



7-1 $y=ax+b$와 $y=\frac{4}{a}x-c$의 그래프가 일치하므로

$a=\frac{4}{a}$ ⋯㉠, $b=-c$ ⋯㉡

㉠에서 $a^2=4$이고 $a<0$이므로 $a=-2$

$y=-2x+b$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지나므로

$0=2+b \qquad \therefore\ b=-2$

㉡에서 $c=-b=2$

$\therefore\ abc=(-2)\times(-2)\times2=8$

7-2 $y=ax-1$과 $y=bx+b$의 그래프가 평행하므로

$a=b,\ -1\neq b$ $\cdots$㉠

$y=ax-1$과 $y=2x-\frac{1}{4}$의 그래프가 수직이므로

$a\times2=-1$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{2}$

㉠에서 $b=a=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-1$

7-3 $y=\frac{a}{3}x+\frac{1}{2}$과 $y=\frac{b}{2}x+3$의 그래프가 평행하므로

$\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$에서 $2a=3b$ $\cdots$㉠

$y=\frac{a}{3}x+\frac{1}{2}$과 $y=\frac{2}{3}x+2$의 그래프가 평행하므로

$\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$에서 $a=2$

㉠에서 $4=3b$이므로 $b=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore ab=\frac{8}{3}$

7-4 직선 AB의 기울기는 $\frac{2-8}{6-(-2)}=-\frac{3}{4}$이므로

$a\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-1$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}$

[다른 풀이]

선분 AB의 수직이등분선은 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점

$\left(\frac{-2+6}{2},\ \frac{8+2}{2}\right)$, 즉 점 $(2,\ 5)$를 지난다.

즉, $y=ax+\frac{7}{3}$의 그래프가 점 $(2,\ 5)$를 지나므로

$5=a\times2+\frac{7}{3}$ $\quad\therefore a=\frac{4}{3}$

7-5 두 직선 l, m과 일차함수 $y=ax+4a$의 그래프가 삼각형을 만들 수 없는 경우는 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

(i) 일차함수 $y=ax+4a$의 그래프가 직선 l과 평행할 때,

직선 l의 기울기가 $\frac{2-0}{0-(-2)}=1$이므로 $a=1$

(ii) 일차함수 $y=ax+4a$의 그래프가 직선 m과 평행할 때,

직선 m의 기울기가 $\frac{0-2}{3-0}=-\frac{2}{3}$이므로 $a=-\frac{2}{3}$

(iii) 일차함수 $y=ax+4a$의 그래프가 두 직선 l, m의 교점 $(0,\ 2)$를 지날 때,

$2=a\times0+4a$에서 $2=4a$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 (i)~(iii)에 의해 a의 값은 $-\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ 1$이다.

8-1 일차함수 $y=f(x)$의 그래프는 기울기가 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(1,\ -4)$를 지나므로 일차함수의 식은

$y-(-4)=-\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$

8-2 $y=ax+b$의 그래프가 두 점 $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$을 지나므로

$a=(\text{기울기})=\frac{6-0}{0-3}=-2,\ b=(y\text{절편})=6$

즉, $y=-2x+6$과 $y=mx+3$의 그래프가 수직이므로

$(-2)\times m=-1$ $\quad\therefore m=\frac{1}{2}$

8-3 (가)에서 $\frac{f(m)-f(n)}{2}=-(m-n)$

$\frac{f(m)-f(n)}{m-n}=-2$ $\quad\therefore a=-2$

(나)에서 $y=-2x+b$의 그래프가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=-2+b$ $\quad\therefore b=4$

즉, $y=-2x+4$의 그래프가 점 $(5,\ k)$를 지나므로

$k=-10+4=-6$

8-4 사각형 ABCD가 평행사변형이므로 $\overline{\mathrm{AB}}/\!/\overline{\mathrm{CD}}$이다.

즉, 직선 AB와 직선 CD의 기울기는 같다.

(직선 AB의 기울기)$=\frac{4-3}{1-(-2)}=\frac{1}{3}$

따라서 직선 CD는 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 점 $\mathrm{C}(-1,\ 3)$을 지나므로 직선 CD를 그래프로 하는 일차함수의 식은

$y-3=\frac{1}{3}\{x-(-1)\}$ $\quad\therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$

8-5 직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선은 원의 중심 $(3,\ 1)$을 지나야 한다.

따라서 두 점 $(-2,\ 2)$, $(3,\ 1)$을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은

$y-1=\frac{1-2}{3-(-2)}(x-3)$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{5}x+\frac{8}{5}$

8-6 △ABC의 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$이라 하면

$\mathrm{P}(3,\ 4)$, 즉 $\frac{x_1+x_2}{2}=3,\ \frac{y_1+y_2}{2}=4$에서

$x_1+x_2=6$ $\cdots$㉠, $y_1+y_2=8$ $\cdots$㉡

$\mathrm{Q}(4,\ -1)$, 즉 $\frac{x_2+x_3}{2}=4,\ \frac{y_2+y_3}{2}=-1$에서

$x_2+x_3=8$ $\cdots$㉢, $y_2+y_3=-2$ $\cdots$㉣

$\mathrm{R}(6,\ 1)$, 즉 $\frac{x_3+x_1}{2}=6,\ \frac{y_3+y_1}{2}=1$에서

$x_3+x_1=12$ $\cdots$㉤, $y_3+y_1=2$ $\cdots$㉥

㉠+㉢+㉤을 하면 $2(x_1+x_2+x_3)=26$

$\therefore x_1+x_2+x_3=13$ $\cdots$㉦

㉦−㉠에서 $x_3=7$, ㉦−㉢에서 $x_1=5$,

㉦−㉤에서 $x_2=1$

마찬가지 방법으로 ㉡, ㉣, ㉥을 연립하여 풀면

$y_1=6,\ y_2=2,\ y_3=-4$

따라서 $\mathrm{A}(5,\ 6)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$, $\mathrm{C}(7,\ -4)$이므로

직선 AB를 그래프로 하는 일차함수의 식은

$y-2=\frac{2-6}{1-5}(x-1)$ $\quad\therefore y=x+1$

9-1 y가 x에 대한 일차함수이므로

$y=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$\begin{cases}0=-39a+b\\100=357a+b\end{cases}$ $\quad\therefore a=\dfrac{25}{99}$, $b=\dfrac{325}{33}$

$\therefore y=\dfrac{25}{99}x+\dfrac{325}{33}$

따라서 $x=27$일 때, $y=\dfrac{25}{99}\times27+\dfrac{325}{33}=\dfrac{50}{3}$(H)

9-2 두 점 (0, 840), (7, 0)을 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 $y=\dfrac{0-840}{7-0}x+840$

$\therefore y=-120x+840$ $(0\le x\le7)$

$y=480$일 때, $480=-120x+840$ $\qquad\therefore x=3$

따라서 다운로드를 시작한 지 3분 후이다.

9-3 (1) 우영이가 출발한 지 x분 후에 소정이가 이동한 거리는 $60(x+6)$m, 우영이가 이동한 거리는 $180x$m이므로 두 사람 사이의 거리는

$y=|60(x+6)-180x|=|-120x+360|$

$\therefore y=\begin{cases}-120x+360 & (0\le x<3)\\120x-360 & (3\le x\le15)\end{cases}$

(2) 두 사람 사이의 거리가 1.2km, 즉 1200m이므로

(i) $y=-120x+360$에서 $1200=-120x+360$

$\therefore x=-7$

이때 $0\le x<3$을 만족하지 않는다.

(ii) $y=120x-360$에서 $1200=120x-360$

$\therefore x=13$

따라서 (i), (ii)에 의해 두 사람의 거리가 1.2km가 되는 것은 우영이가 출발한 지 13분 후이다.

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.116~118

01 -6 **02** $a>3$ **03** $k<-4$ 또는 $k>5$
04 $a=3$, $b=1$ **05** 1 **06** ③
07 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-2$ **08** ㄱ, ㄷ, ㅂ **09** ③
10 ㉠ : m, ㉡ : n, ㉢ : l **11** 최댓값 : 10, 최솟값 : 2
12 $y=-3x+15$ **13** $\dfrac{3}{4}$ **14** $\dfrac{4}{9}$
15 $y=-x-2$ **16** 9 **17** 12분 **18** 5초

01 (나)에서

$f^3(x)=a\{a(ax+b)+b\}+b=a^3x+a^2b+ab+b$이므로

$f^3(3)=3a^3+a^2b+ab+b$, $f^3(2)=2a^3+a^2b+ab+b$

즉, $f^3(3)-f^3(2)=a^3=-1$이므로 $a=-1$

$\therefore f(x)=-x+b$

(가)에서 $f(-1)=1+b=-1$이므로 $b=-2$

따라서 $f(x)=-x-2$이므로 $f(4)=-4-2=-6$

02 $-2<x\le1$일 때, $f(x)<0$이 항상 성립하려면

$f(-2)\le0$, $f(1)<0$이어야 한다.

$f(-2)=-2a-2a+3\le0$에서

$-4a\le-3$ $\qquad\therefore a\ge\dfrac{3}{4}$ $\qquad\cdots$㉠

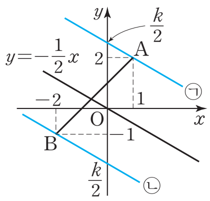
$f(1)=a-2a+3<0$에서

$-a<-3$ $\qquad\therefore a>3$ $\qquad\cdots$㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $a>3$이다.

03 $y=-\dfrac{1}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 $y=-\dfrac{1}{2}(x-k)$, 즉 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$

이때 $\dfrac{k}{2}$는 y절편이고 이 그래프가 선분 AB와 만나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠보다 위쪽에 있거나 직선 ㉡보다 아래쪽에 있어야 한다.



직선 ㉠은 점 A(1, 2)를 지나므로

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$에 $x=1$, $y=2$를 대입하면

$2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{k}{2}$ $\qquad\therefore k=5$

직선 ㉡은 점 B$(-2, -1)$을 지나므로

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{k}{2}$에 $x=-2$, $y=-1$을 대입하면

$-1=-\dfrac{1}{2}\times(-2)+\dfrac{k}{2}$ $\qquad\therefore k=-4$

따라서 그래프가 선분 AB와 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위는 $k<-4$ 또는 $k>5$이다.

04 두 일차함수에서 기울기를 비교하면 $a>a-4$이므로

$y=ax-2+b$의 그래프는 오른쪽 위로 향하는 직선이고, $y=(a-4)x+3b$의 그래프는 오른쪽 아래로 향하는 직선이다.

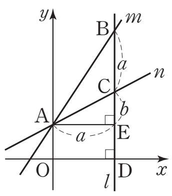
$y=ax-2+b$의 그래프의 y절편이 -1이므로

$-2+b=-1$ $\qquad\therefore b=1$

$y=(a-4)x+3b$의 그래프의 x절편이 3이므로

$-\dfrac{3b}{a-4}=-\dfrac{3}{a-4}=3$ $\qquad\therefore a=3$

05 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 E라 하고 $\overline{AE}=a$, $\overline{CE}=b$라 하면



$\overline{BC}=\overline{OD}=\overline{AE}=a$이므로

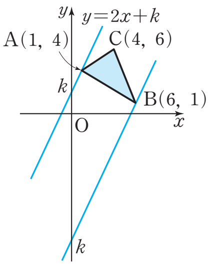
$\overline{BE}=a+b$

(직선 m의 기울기)$=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\dfrac{a+b}{a}=1+\dfrac{b}{a}$

(직선 n의 기울기)$=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\dfrac{b}{a}$

따라서 두 직선의 기울기의 차는 $\left(1+\dfrac{b}{a}\right)-\dfrac{b}{a}=1$

06 k는 $y=2x+k$의 그래프의 y절편이므로 오른쪽 그림과 같이 그래프가 점 $A(1,\ 4)$를 지날 때 최대이고, 점 $B(6,\ 1)$을 지날 때 최소이다.



$y=2x+k$에 $x=1$, $y=4$를 대입하면 $4=2+k$ $\quad\therefore k=2$

$y=2x+k$에 $x=6$, $y=1$을 대입하면 $1=2\times6+k$ $\quad\therefore k=-11$

따라서 k의 최댓값은 2, 최솟값은 -11이다.

07 정호가 그린 그래프는 기울기가 $-\frac{1}{2}$, y절편이 -2인 직선이므로 이를 그래프로 하는 함수의 식은 $y=-\frac{1}{2}x-2$

혜미가 그린 그래프는 기울기가 $\frac{1}{2}$, y절편이 2인 직선이므로 이를 그래프로 하는 함수의 식은 $y=\frac{1}{2}x+2$

이때 정호는 y절편을 바르게 보고 혜미는 기울기를 바르게 보았으므로 주어진 일차함수의 그래프의

기울기 a는 $a=\frac{1}{2}$, y절편 b는 $b=-2$이다.

08 ㄱ. $y=ax+b-1$의 그래프의 기울기가 양수이므로 $a>0$
y절편은 음수이므로 $b-1<0$ $\quad\therefore b<1$

ㄷ. $x=1$일 때, y의 값은 음수이므로 $a+b-1<0$
$\therefore a+b<1$

ㅂ. $x=2$일 때, y의 값은 양수이므로 $2a+b-1>0$
$\therefore 2a+b>1$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅂ이다.

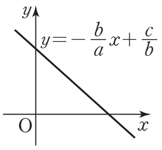
09 $ab^2c>0$에서 $ab\times bc>0$이므로

(i) $ab>0$, $bc>0$일 때,

$y=-\frac{b}{a}x+\frac{c}{b}$에서

$-\frac{b}{a}<0$, $\frac{c}{b}>0$이므로

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

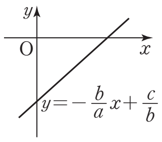


(ii) $ab<0$, $bc<0$일 때,

$y=-\frac{b}{a}x+\frac{c}{b}$에서

$-\frac{b}{a}>0$, $\frac{c}{b}<0$이므로

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 (i), (ii)에 의해 일차함수 $y=-\frac{b}{a}x+\frac{c}{b}$의 그래프는 제1사분면과 제4사분면을 반드시 지난다.

10 ㉠, ㉡의 그래프의 기울기의 부호는 같고 ㉢의 그래프의 기울기의 부호는 이와 다르므로 기울기의 부호가 다른 직선 l은 ㉢의 그래프이다.

이때 직선 l의 기울기는 양수이고 y절편도 양수이므로

$-a>0$, $b-3>0$ $\quad\therefore a<0$, $b>3$

따라서 y절편 b가 양수인 ㉠의 그래프는 m이고,

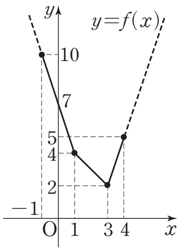
y절편 $-\frac{1}{2}b$가 음수인 ㉡의 그래프는 n이다.

11 $f(x)=|x-1|+2|x-3|$에서

(i) $-1\le x<1$일 때,
$f(x)=-(x-1)-2(x-3)$
$=-3x+7$

(ii) $1\le x<3$일 때,
$f(x)=(x-1)-2(x-3)$
$=-x+5$

(iii) $3\le x\le4$일 때,
$f(x)=(x-1)+2(x-3)$
$=3x-7$



즉, x의 값의 범위가 $-1\le x\le4$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위의 그림과 같으므로 $f(x)$의 최댓값은 10, 최솟값은 2이다.

12 $y=ax+6-3a$에서 $a(x-3)+(-y+6)=0$

즉, 이 그래프는 항상 점 $(3,\ 6)$을 지난다.

$\therefore P(3,\ 6)$

직선 $y=\frac{1}{3}x+7$에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면

$\frac{1}{3}\times m=-1$에서 $m=-3$

따라서 점 $P(3,\ 6)$을 지나고 기울기가 -3인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은

$y-6=-3(x-3)$

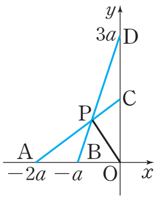
$\therefore y=-3x+15$

13 $\overline{AB}=\overline{BO}$이므로 양수 a에 대하여

$A(-2a,\ 0)$, $B(-a,\ 0)$이라 하자.

직선 BD의 기울기가 3이므로

$\frac{\overline{DO}}{\overline{BO}}=3$에서 $D(0,\ 3a)$



이때 $\overline{AB}=\overline{BO}$이므로

$\triangle PAB=\triangle PBO$

또 $\triangle PAB+\triangle PCD=$(사각형 PBOC의 넓이)이므로

$\triangle PCD=\triangle POC$

즉, $\overline{CO}=\overline{CD}$이다. $\quad\therefore C\left(0,\ \frac{3}{2}a\right)$

$\therefore$ (직선 AC의 기울기)$=\dfrac{\frac{3}{2}a-0}{0-(-2a)}=\frac{3}{4}$

14 직사각형 OABC의 넓이는 $3\times5=15$이므로

함수 $y=mx+1$의 그래프에 의해 생긴 아랫부분의 넓이는

$15\times\frac{1}{3}=5$이다.

점 D의 좌표를 $(3,\ d)$라 하면 직사각형에서 아랫부분의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times(1+d)\times3=5$에서 $d=\frac{7}{3}$ $\quad\therefore D\left(3,\ \frac{7}{3}\right)$

따라서 m은 두 점 $(0,\ 1)$, $\left(3,\ \frac{7}{3}\right)$을 지나는 직선의 기울기이므로 $m=\dfrac{\frac{7}{3}-1}{3-0}=\frac{4}{9}$

15 점 A의 y좌표는 4이므로 $y=-\frac{1}{2}x+1$에 $y=4$를 대입하면

$4=-\frac{1}{2}x+1$에서 $x=-6$ $\quad\therefore$ A$(-6,\ 4)$

직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$의 x절편은 2이므로 D$(2,\ 0)$

또 $\overline{AD}//\overline{BC}$이므로 $\overline{CD}=\overline{AB}=4$ $\quad\therefore$ C$(2,\ -4)$

따라서 두 점 A$(-6,\ 4)$, C$(2,\ -4)$를 지나는 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은

$y-4=\frac{-4-4}{2-(-6)}(x+6)$ $\quad\therefore\ y=-x-2$

16 직선 OQ는 기울기가 $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$이고, 원점을 지나므로 직선 OQ를 그래프로 하는 일차함수의 식은 $y=\frac{3}{2}x$이다.

또 직선 PQ는 기울기가 $\frac{-6}{2}=-3$이고, 점 $(6,\ 0)$을 지나므로 직선 PQ를 그래프로 하는 일차함수의 식은

$y-0=-3(x-6)$ $\quad\therefore\ y=-3x+18$

이때 점 B의 좌표를 B$(a,\ 0)$이라 하면 점 A의 x좌표도 a이고, 점 A는 $y=\frac{3}{2}x$의 그래프 위의 점이므로

A$\left(a,\ \frac{3}{2}a\right)$

즉, 사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\frac{3}{2}a$이므로

D$\left(\frac{5}{2}a,\ \frac{3}{2}a\right)$

점 D는 $y=-3x+18$의 그래프 위의 점이므로

$\frac{3}{2}a=-3\times\frac{5}{2}a+18$ $\quad\therefore\ a=2$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는

$\frac{3}{2}a=\frac{3}{2}\times2=3$이므로 구하는 넓이는 $3\times3=9$이다.

17 시침은 1분에 0.5°씩 움직이고, 분침은 1분에 6°씩 움직이므로 5시 40분을 가리키는 시계의 시침과 분침이 이루는 각 중 크기가 작은 쪽의 각의 크기는

$40\times6^\circ-(5\times30^\circ+40\times0.5^\circ)=240^\circ-170^\circ=70^\circ$

이때 $6^\circ-0.5^\circ=5.5^\circ$이므로 1분에 시침과 분침이 이루는 각의 크기는 5.5°씩 커진다.

$\therefore\ y=5.5x+70\ (0\le x\le20)$

$y=136$일 때, $136=5.5x+70$ $\quad\therefore\ x=12$

따라서 5시 40분부터 12분 후이다.

18 점 P가 점 A를 출발한 지 x초 후 △CAP와 △DPB의 넓이의 합을 $y\,\text{cm}^2$라 하면

$\overline{AP}=5x\,\text{cm}$, $\overline{BP}=(80-5x)\,\text{cm}$이므로

$y=\frac{1}{2}\times5x\times60+\frac{1}{2}\times(80-5x)\times30$

$\therefore\ y=75x+1200\ (0<x<16)$

$1575=75x+1200$에서 $x=5$

따라서 점 P가 출발한 지 5초 후이다.

STEP 3 최고 수준 완성하기 P.119~120

01 $f(x)=-\frac{3}{7}x+\frac{10}{7}$ **02** $a=-4,\ b=-5$
03 5개 **04** -3 **05** 16 **06** $y=-x+1$
07 4개 **08** 390 km

01 $f(x^2)=f(x)g(x)-5$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)g(1)-5$

이때 $g(1)=6$이므로 $f(1)=6f(1)-5$

$\therefore\ f(1)=1$

$f(x)=ax+b$라 하면

$f(1)=1$이므로 $a+b=1$ $\quad\cdots㉠$

$f(8)=-2$이므로 $8a+b=-2$ $\quad\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{7}$, $b=\frac{10}{7}$

$\therefore\ f(x)=-\frac{3}{7}x+\frac{10}{7}$

02 $f(x+1)-f(x-1)=-8$에 $x=0$을 대입하면

$f(1)-f(-1)=-8$ $\quad\cdots㉠$

㉠에 $f(-1)=-1$을 대입하면

$f(1)-(-1)=-8$

$\therefore\ f(1)=-9$

즉, $f(x)=ax+b$에서

$f(-1)=-1$, $f(1)=-9$이므로

$-a+b=-1$, $a+b=-9$

이 두 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-5$

[다른 풀이]

일차함수 $f(x)=ax+b$에서 a는 기울기이므로

$a=\frac{f(x+1)-f(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{-8}{2}=-4$

또 $f(-1)=-1$이므로

$f(x)=-4x+b$에 $x=-1$, $y=-1$을 대입하면

$-1=4+b$

$\therefore\ b=-5$

03 선분 AB 위에 있고 두 점 A, B가 아니면서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 C$(m,\ n)$이라 하면

$5<m<49$, $21<n<325$

이때 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있고

(직선 AB의 기울기)$=\frac{325-21}{49-5}=\frac{304}{44}=\frac{76}{11}$이므로

(직선 AC의 기울기)$=\frac{n-21}{m-5}=\frac{76}{11}$

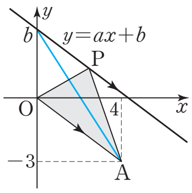
즉, $m-5=11k$, $n-21=76k$(k는 0이 아닌 정수)라 하면

$m=11k+5$, $n=76k+21$이므로

조건을 만족하는 점 C$(m,\ n)$은 $(16,\ 97)$, $(27,\ 173)$, $(38,\ 249)$이다.

따라서 선분 AB 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 두 점 A, B와 세 점 $(16,\ 97)$, $(27,\ 173)$, $(38,\ 249)$의 5개이다.

04 선분 OA를 밑변으로 하는 삼각형의 넓이가 일정하려면 높이가 일정해야 하므로 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 선분 OA와 평행해야 한다.



즉, 선분 OA의 기울기는 $-\frac{3}{4}$

이므로 $a=-\frac{3}{4}$

또 $y=ax+b$의 y절편이 b이므로

$\triangle OAP=\frac{1}{2}\times b\times 4=8$ $(\because b>0)$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore ab=\left(-\frac{3}{4}\right)\times 4=-3$

05 $|y|=-2|x|+4$에서

(i) $x\geq 0$, $y\geq 0$일 때, $y=-2x+4$

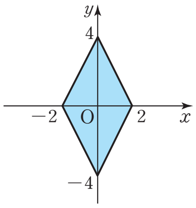
(ii) $x\geq 0$, $y<0$일 때, $y=2x-4$

(iii) $x<0$, $y\geq 0$일 때, $y=2x+4$

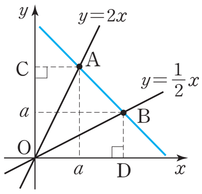
(iv) $x<0$, $y<0$일 때, $y=-2x-4$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\times\left(\frac{1}{2}\times 4\times 4\right)=16$



06 일차함수 $y=2x$의 그래프 위의 점 A를 $A(a,\ 2a)$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BD}$이므로 $\overline{AC}=\overline{BD}=a$



이때 점 B는 일차함수 $y=\frac{1}{2}x$의 그래프 위의 점이고 y좌표가 a이므로 $B(2a,\ a)$

즉, 직선 AB의 기울기는 $\frac{a-2a}{2a-a}=-1$

따라서 기울기가 -1이고 x절편이 1인 직선을 그래프로 하는 일차함수의 식은 $y=-x+1$

07 정수 n에 대하여 $n\leq x<n+1$일 때, $[x]=n$이다.

함수 $y=x[x]$에서

(i) $1\leq x<2$일 때, $[x]=1$이므로 $y=x$

즉, $1\leq y<2$이므로 정수 y의 값은 1이다.

(ii) $2\leq x<3$일 때, $[x]=2$이므로 $y=2x$

즉, $4\leq y<6$이므로 정수 y의 값은 4, 5이다.

(iii) $x=3$일 때, $[x]=3$이므로 $y=3\times 3=9$

따라서 (i)~(iii)에 의해 정수 y는 1, 4, 5, 9의 4개이다.

08 36 L의 기름을 넣었을 때 계기판의 눈금은 $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$만큼 올라갔으므로 자동차에 기름이 가득 찼을 때의 기름의 양을 a L라 하면

$\frac{2}{3}:36=1:a$ $\quad\therefore a=\frac{36}{\frac{2}{3}}=54(L)$

즉, 자동차 계기판의 눈금의 변화량을 x, 소모한 기름의 양을 y L라 하면 x, y 사이의 관계식은 $y=54x$ $(x\geq 0)$

A도시에서 B도시로 가는 동안 계기판의 눈금은 기름이 가득 찼을 때의 $\frac{5}{6}$에서 $\frac{1}{9}$까지 변했으므로 눈금의 변화량 x는 $x=\frac{5}{6}-\frac{1}{9}=\frac{13}{18}$

$x=\frac{13}{18}$을 $y=54x$에 대입하면 $y=54\times\frac{13}{18}=39$

따라서 자동차는 1 L로 10 km를 갈 수 있으므로 A도시와 B도시 사이의 거리는 390 km이다.

2 일차함수와 일차방정식

STEP 1 유형별 문제 공략하기 P.122~125

1-1 ①	**1-2** ②	**1-3** $a<-\frac{1}{2}$		**2-1** $x=4$
2-2 ③	**2-3** 25	**2-4** 2	**3-1** 6	**3-2** $\frac{5}{2}$
3-3 ②	**3-4** $\frac{5}{3}$	**4-1** $\frac{9}{4}$	**4-2** $\frac{27}{4}$	
4-3 제2사분면		**5-1** $\frac{35}{2}$	**5-2** $\frac{25}{4}$	**5-3** 2
5-4 $-\frac{7}{9}$	**5-5** $x=4$	**5-6** $4x-5y-18=0$		**5-7** 60
6-1 ②	**6-2** $P(-3,\ 0)$, $Q\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$			**7-1** 1
7-2 2	**7-3** 3			

1-1 $ax-by+c=0$에서 $y=\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$이므로

$\frac{a}{b}<0$, $\frac{c}{b}>0$

이때 a와 b는 다른 부호, b와 c는 같은 부호이므로 a와 c는 다른 부호이다.

$-bx+cy+a=0$에서 $y=\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$이므로

$\frac{b}{c}>0$, $-\frac{a}{c}>0$

따라서 기울기와 y절편이 모두 양수인 그래프는 ①이다.

1-2 y절편이 a이므로 $q=a$

즉, 직선 $\frac{x}{p}+\frac{y}{a}=1$이 점 $(b,\ 2a)$를 지난다.

$x=b$, $y=2a$를 대입하면

$\frac{b}{p}+\frac{2a}{a}=1$, $\frac{b}{p}=-1$ $\quad\therefore p=-b$

$\therefore p+q=a-b$

1-3 $y=-(2a+1)x+4a-2$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 (기울기)>0, (y절편)≤ 0이어야 한다.

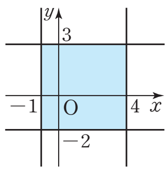
$-(2a+1)>0$에서 $a<-\frac{1}{2}$, $4a-2\leq 0$에서 $a\leq\frac{1}{2}$

$\therefore a<-\frac{1}{2}$

2-1 x축에 수직인 직선이므로 두 점의 x좌표가 같아야 한다.
즉, $a+1=2a-2$에서 $a=3$
따라서 구하는 직선의 방정식은 $x=4$이다.

2-2 y축에 평행한 직선의 방정식은 $x=a\ (a\neq0)$의 꼴이다.
③ $2x-3=0$에서 $x=\frac{3}{2}$

2-3 $2x-8=0$에서 $x=4$
$x+1=0$에서 $x=-1$,
$y-3=0$에서 $y=3$
즉, 네 직선 $x=4$, $y=-2$, $x=-1$, $y=3$으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이는
$\{4-(-1)\}\times\{3-(-2)\}=25$

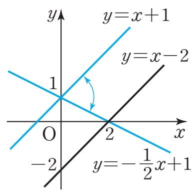


2-4 직선 $2ax-(b-3)y+4=0$이 직선 $x=-4$와 평행하므로 x축에 수직인 직선이다.
즉, y의 계수가 0이어야 하므로 $b-3=0$
$\therefore\ b=3$
직선 $2ax+4=0$에서 $x=-\frac{2}{a}$이고, 이 그래프가 점 $(-3,\ 5)$를 지나므로 $-\frac{2}{a}=-3 \qquad \therefore\ a=\frac{2}{3}$
$\therefore\ ab=2$

3-1 직선 $2x+y=8b$가 점 $(a,\ b)$를 지나므로 $x=a$, $y=b$를 대입하면 $2a+b=8b$에서 $a=\frac{7}{2}b$ $\quad\cdots$㉠
직선 $x-2y=2$가 점 $(a,\ b)$를 지나므로 $x=a$, $y=b$를 대입하면 $a-2b=2$ $\quad\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{14}{3}$, $b=\frac{4}{3}$
$\therefore\ a+b=\frac{14}{3}+\frac{4}{3}=6$

3-2 두 직선의 교점의 좌표는 연립방정식 $\begin{cases}2x+y=6\\x-y=-3\end{cases}$의 해와 같으므로 $x=1$, $y=4$
구하는 직선은 $y=\frac{2}{3}x-2$의 그래프와 평행하므로 기울기는 $\frac{2}{3}$이고 점 $(1,\ 4)$를 지난다.
즉, 직선의 방정식을 $y=\frac{2}{3}x+b$라 하고 $x=1$, $y=4$를 대입하면
$4=\frac{2}{3}+b \qquad \therefore\ b=\frac{10}{3}$
따라서 직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}$이 점 $(k,\ 2k)$를 지나므로
$2k=\frac{2}{3}k+\frac{10}{3} \qquad \therefore\ k=\frac{5}{2}$

3-3 연립방정식 $\begin{cases}x-y=2\\kx+y=1\end{cases}$을 풀면 $x=\frac{3}{k+1}$, $y=\frac{1-2k}{k+1}$
두 직선의 교점이 제1사분면에 있으려면 교점의 x좌표와 y좌표가 모두 양수이어야 한다.
$k+1>0$, $1-2k>0 \qquad \therefore\ -1<k<\frac{1}{2}$
[다른 풀이]
$y=-kx+1$의 그래프는 기울기가 $-k$이고, y절편이 1인 직선이므로 직선 $y=x-2$와 제1사분면에서 만나기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 기울기가 1보다 작고 $-\frac{1}{2}$보다 커야 한다.



따라서 $-\frac{1}{2}<-k<1$이므로 $-1<k<\frac{1}{2}$이다.

3-4 두 점 $(2,\ 10)$, $(-1,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=\frac{1-10}{-1-2}(x+1) \qquad \therefore\ y=3x+4$
즉, 직선 $y=3x+4$와 직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$의 교점의 좌표를 구하면 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$
이 점이 직선 $ax-y+2=0$ 위의 점이므로
$-\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}+2=0 \qquad \therefore\ a=\frac{5}{3}$

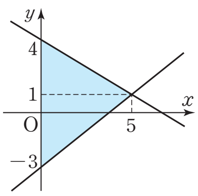
4-1 두 직선의 교점이 2개 이상이므로 두 직선은 일치한다.
연립방정식 $\begin{cases}ax-y=5a\\3x+2y=4b\end{cases}$의 해가 무수히 많으므로
$\frac{a}{3}=\frac{-1}{2}=\frac{5a}{4b} \qquad \therefore\ a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{15}{4}$
$\therefore\ a+b=\frac{9}{4}$

4-2 연립방정식 $\begin{cases}2x-ay+6=0\\3x-2y+b=0\end{cases}$의 해가 무수히 많으므로
$\frac{2}{3}=\frac{-a}{-2}=\frac{6}{b} \qquad \therefore\ a=\frac{4}{3}$, $b=9$
한편 직선 $bx-ky=9$는 기울기가 $\frac{b}{k}$이고, 직선 $y=ax+b$와 평행하므로
$\frac{b}{k}=a$에서 $\frac{9}{k}=\frac{4}{3} \qquad \therefore\ k=\frac{27}{4}$

4-3 연립방정식 $\begin{cases}(m-2)x-3y=0\\(1-m)x-2y=0\end{cases}$의 해가 $x=0$, $y=0$ 이외에도 있으므로 두 직선 $(m-2)x-3y=0$, $(1-m)x-2y=0$이 일치한다.
즉, $\frac{m-2}{1-m}=\frac{-3}{-2}$에서 $m=\frac{7}{5}$
따라서 일차함수 $y=mx+1-2m$은 $y=\frac{7}{5}x-\frac{9}{5}$이므로 그 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.

5-1 연립방정식 $\begin{cases} 3x+5y=20 \\ 4x-5y=15 \end{cases}$를 풀면 $x=5$, $y=1$

즉, 두 직선 $3x+5y=20$, $4x-5y=15$의 교점의 좌표는 $(5,\ 1)$이고, 두 직선의 y절편은 각각 4, -3이므로 오른쪽 그림에서 구하는 도형의 넓이는



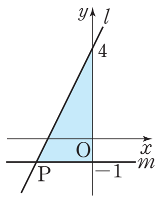
$\frac{1}{2}\times7\times5=\frac{35}{2}$

5-2 직선 l의 방정식은 $y-10=\frac{10-2}{3-(-1)}(x-3)$

$\therefore y=2x+4$

직선 m의 방정식은 $y=-1$

오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m의 교점을 P라 하면

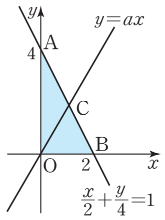


$2x+4=-1$에서 $x=-\frac{5}{2}$

$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{5}{2},\ -1\right)$

따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times5=\frac{25}{4}$

5-3 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$의 x절편이 2, y절편이 4이므로 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$를 지난다.



두 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$과 $y=ax$의 교점을 C라 하면 $\triangle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$

즉, $\triangle\mathrm{COB}=2$이므로 점 C의 y좌표를 k라 하면

$\triangle\mathrm{COB}=\frac{1}{2}\times2\times k=2 \qquad \therefore k=2$

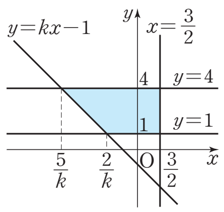
이때 점 C는 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$ 위의 점이므로 $y=2$를 대입하면

$\frac{x}{2}+\frac{2}{4}=1 \qquad \therefore x=1$

따라서 점 $\mathrm{C}(1,\ 2)$가 직선 $y=ax$ 위의 점이므로

$2=a\times1 \qquad \therefore a=2$

5-4 직선 $kx-y-1=0$이 두 직선 $y=4$, $y=1$과 만나는 점의 x좌표는 각각 $\frac{5}{k}$, $\frac{2}{k}$이므로 주어진 네 직선을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 $k<0$이므로 색칠한 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{k}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{k}\right)\right\}\times3=18$

$3-\frac{7}{k}=12 \qquad \therefore k=-\frac{7}{9}$

5-5 평행사변형의 넓이를 이등분하는 직선은 대각선의 교점을 지난다.

이때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 점 $(4,\ 2)$가 대각선의 교점이므로 구하는 직선은 점 $(4,\ 2)$를 지나고 y축에 평행하다.

$\therefore x=4$

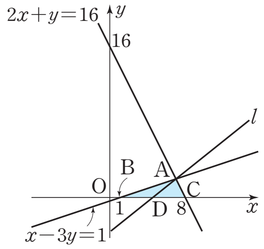
5-6 두 직선 $x-3y=1$, $2x+y=16$의 교점을 A라 하자.

연립방정식 $\begin{cases} x-3y=1 \\ 2x+y=16 \end{cases}$을 풀면

$x=7$, $y=2$

$\therefore \mathrm{A}(7,\ 2)$

오른쪽 그림과 같이 점 B, C, D도 정하면 직선 l이 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 이등분하므로 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점이다.



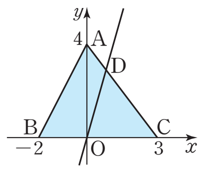
$\therefore \mathrm{D}\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$

따라서 두 점 $\mathrm{A}(7,\ 2)$, $\mathrm{D}\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$을 지나는 직선 l의 방정식은

$y-2=\frac{0-2}{\frac{9}{2}-7}(x-7)$

$\therefore 4x-5y-18=0$

5-7 오른쪽 그림에서 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times5\times4=10$



원점을 지나는 직선이 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이를 이등분하므로 이 직선이 $\overline{\mathrm{AC}}$와 만나는 점을 D라 하면 $\triangle\mathrm{OCD}$의 넓이는 5이다.

$\triangle\mathrm{OCD}$의 높이를 h라 하면

$\frac{1}{2}\times3\times h=5$에서 $h=\frac{10}{3}$

즉, 점 D는 y좌표가 $\frac{10}{3}$이고 직선 AC 위의 점이므로

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$에 $y=\frac{10}{3}$을 대입하면 $x=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{D}\left(\frac{1}{2},\ \frac{10}{3}\right)$

따라서 직선 OD의 기울기는 $\frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{20}{3}$이므로

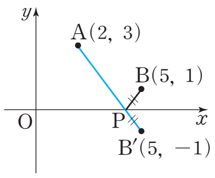
직선의 방정식은

$y=\frac{20}{3}x$에서 $20x-3y=0$

$\therefore a=20$, $b=3$

$\therefore ab=60$

6-1 점 $\mathrm{B}(5,\ 1)$과 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B}'(5,\ -1)$이라 하면 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{B'P}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{AB'}}$이다.



직선 $\mathrm{AB'}$의 방정식은

$y-3=\dfrac{-1-3}{5-2}(x-2)$

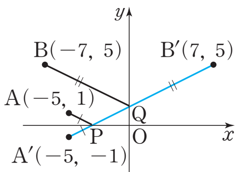
$\therefore\ y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{17}{3}$

이때 점 P는 직선 $\mathrm{AB'}$과 x축의 교점이므로

$0=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{17}{3}\qquad \therefore\ x=\dfrac{17}{4}$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\dfrac{17}{4},\ 0\right)$이다.

6-2 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(-5,\ 1)$과 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(-5,\ -1)$이라 하고, 점 $\mathrm{B}(-7,\ 5)$와 y축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B}'(7,\ 5)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B'Q}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B'}}$이다.



직선 $\mathrm{A'B'}$의 방정식은

$y-5=\dfrac{-1-5}{-5-7}(x-7)\qquad \therefore\ y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

따라서 두 점 P, Q는 각각 직선 $\mathrm{A'B'}$이 x축, y축과 만나는 점이므로 $\mathrm{P}(-3,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$이다.

7-1 두 직선 $2x-y=3$, $3x+y=7$의 교점의 좌표는 $(2,\ 1)$이고, 이 점은 직선 $ax+(4-a)y=5$ 위의 점이므로

$a\times2+(4-a)\times1=5\qquad \therefore\ a=1$

7-2 두 직선 $3x-2y+4=0$, $ax+2y-1=0$이 평행하므로

$\dfrac{3}{a}=\dfrac{-2}{2}\neq\dfrac{4}{-1}$에서 $a=-3$

두 직선 $3x-2y+4=0$, $x+by-5=0$이 평행하므로

$\dfrac{3}{1}=\dfrac{-2}{b}\neq\dfrac{4}{-5}$에서 $b=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ ab=2$

7-3 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=ax-1$이 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x+1$과 평행할 때,
$a=1$ 또는 $a=-1$

(ii) 직선 $y=ax-1$이 두 직선 $y=x$, $y=-x+1$의 교점을 지날 때,
두 직선 $y=x$, $y=-x+1$의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이고 이 점은 직선 $y=ax-1$ 위의 점이므로
$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}a-1$에서 $a=3$

따라서 (i), (ii)에 의해 상수 a의 값의 합은

$-1+1+3=3$

STEP 2 실전 문제 정복하기 P.126~128

01 ②	**02** $\dfrac{79}{6}$	**03** 5	**04** 제3사분면
05 ③	**06** 6	**07** 4	**08** ②
09 $4x+3y-20=0$	**10** $-\dfrac{15}{2}$	**11** $4x+3y+8=0$	
12 $\dfrac{1221}{2}\ \mathrm{cm}^2$	**13** ⑤	**14** $-2\le k<1$	
15 6	**16** $\mathrm{P}(2,\ 0)$ **17** 192		**18** $\mathrm{P}(-2,\ 4)$

01 ㄱ. 직선 $ax+by+c=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$이면 $y=p$ 또는 $x=q$의 꼴이 되므로 일차함수의 그래프가 아니다.

ㄴ. $ab<0$, $ac>0$이면 $bc<0$이므로

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$에서 $-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}>0$

즉, 이 직선은 제4사분면을 지나지 않는다.

ㄷ. $b=0$이면 $ax+c=0$에서 $x=-\dfrac{c}{a}$

즉, y축에 평행한 직선이므로 기울기를 정의할 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

02 두 점 $(0,\ 6)$, $(2,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=6$이므로 주어진 방정식 중에서 가능한 것을 찾는다.

직선 $y=6$으로 가능한 것은 직선 $cy=dx+1$뿐이므로

$y=\dfrac{d}{c}x+\dfrac{1}{c}$에서 $d=0$이고 $\dfrac{1}{c}=6$이므로 $c=\dfrac{1}{6}$

또 직선 $y=6$ 이외에 점 $(0,\ 6)$을 지나는 직선으로 가능한 것은 직선 $2y=x+a$뿐이므로 $2\times6=0+a$에서 $a=12$

직선 $y=6$ 이외에 점 $(2,\ 6)$을 지나는 직선으로 가능한 것은 직선 $y=bx+4$뿐이므로 $6=2b+4$에서 $b=1$

$\therefore\ a+b+c+d=12+1+\dfrac{1}{6}+0=\dfrac{79}{6}$

03 x절편이 9, y절편이 3인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{9}+\dfrac{y}{3}=1$, 즉 $x+3y=9$

x절편이 2, y절편이 -4인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-4}=1$, 즉 $2x-y=4$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 이 두 직선 위의 점이므로

$\begin{cases}a+3b=9\\2a-b=4\end{cases}$를 풀면 $a=3$, $b=2$

$\therefore\ a+b=5$

04 연립방정식 $\begin{cases}ax-y+b=0\\bx-y+a=0\end{cases}$, 즉 $\begin{cases}y=ax+b & \cdots㉠\\y=bx+a & \cdots㉡\end{cases}$에서

㉠$-$㉡을 하면

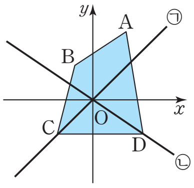
$0=(a-b)x+(b-a)$, $(a-b)x=a-b$

$a-b\neq0$이므로 $x=\dfrac{a-b}{a-b}=1$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $y=a+b$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(1,\ a+b)$이고 이 점이 제4사분면 위의 점이므로 $a+b<0$
이때 $ab>0$에서 $a<0,\ b<0$
따라서 점 $(a,\ b)$는 제3사분면 위의 점이다.

05 네 점 $A(2,\ 4)$, $B(-1,\ 2)$, $C(-2,\ -2)$, $D(3,\ -2)$에 대하여 직선 $y=ax$가 두 선분 AB, CD와 만나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=ax$의 기울기가 직선 ㉠의 기울기보다는 작고, 직선 ㉡의 기울기보다는 커야 한다.



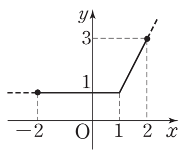
직선 ㉠의 기울기는 $\dfrac{-2-0}{-2-0}=1$

직선 ㉡의 기울기는 $\dfrac{-2-0}{3-0}=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ -\dfrac{2}{3}<a<1$

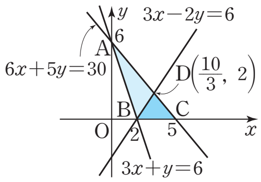
06 $y=mx+1$을 $13x+11y=248$에 대입하면
$13x+11(mx+1)=248$
$(13+11m)x=237$
$\therefore\ x=\dfrac{237}{13+11m}=\dfrac{3\times79}{13+11m}$
이때 x는 정수, m은 자연수이므로 $13+11m=79$
$\therefore\ m=6$

07 $|x|\le2$이므로 $-2\le x\le2$이다.
(i) $1\le x\le2$일 때,
$f(x)=x-1+x=2x-1$
(ii) $-2\le x<1$일 때,
$f(x)=-(x-1)+x=1$
따라서 x의 값의 범위가 $|x|\le2$일 때, $f(x)=|x-1|+x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$의 최댓값은 3, 최솟값은 1이다.



$\therefore\ 3+1=4$

08 세 점 A, B, C의 좌표는 $A(0,\ 6)$, $B(2,\ 0)$, $C(5,\ 0)$이고 점 D는 두 직선 $3x-2y=6$, $6x+5y=30$의 교점이므로



$\begin{cases}3x-2y=6\\6x+5y=30\end{cases}$을 풀면

$x=\dfrac{10}{3},\ y=2\qquad\therefore\ D\left(\dfrac{10}{3},\ 2\right)$

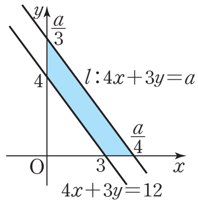
$\triangle DBC=\dfrac{1}{2}\times3\times2=3$

$\triangle ABD=\triangle ABC-\triangle DBC=\dfrac{1}{2}\times3\times6-3=6$

$\therefore\ S_1:S_2=6:3=2:1$

09 직선 l과 직선 $4x+3y=12$는 서로 평행하므로 직선 l의 방정식을 $4x+3y=a$라 하면 직선 l의 x절편은 $\dfrac{a}{4}$, y절편은 $\dfrac{a}{3}$이다.

이때 직선 $4x+3y=12$와 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$이므로 $\dfrac{32}{3}$보다 작다. 즉, 직선 l은 오른쪽 그림과 같이 직선 $4x+3y=12$의 그래프를 y축의 양의 방향으로 평행이동한 것이다.



색칠한 부분의 넓이가 $\dfrac{32}{3}$이므로

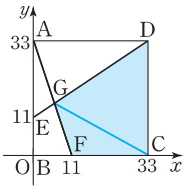
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{4}\times\dfrac{a}{3}-6=\dfrac{32}{3},\ a^2=400$

직선 l의 x절편은 양수이므로 $a>0\qquad\therefore\ a=20$
따라서 직선 l의 방정식은 $4x+3y-20=0$

10 다음에서 두 직선끼리 기울기가 서로 같으므로 각각 평행하다는 것을 알 수 있다.
$\begin{cases}3x+2y-7=0\\6x+4y-11=0\end{cases}$, $\begin{cases}2x-6y-5=0\\x-3y-13=0\end{cases}$, $\begin{cases}4x-y+3=0\\4x-y+c=0\end{cases}$
직선 $3x+2y-7=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $3(x-a)+2(y-b)-7=0$
$\therefore\ 6x+4y-6a-4b-14=0$
이 직선이 직선 $6x+4y-11=0$과 일치하므로
$-6a-4b-14=-11\qquad\cdots$ ㉠
직선 $2x-6y-5=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $2(x-a)-6(y-b)-5=0$
$\therefore\ x-3y-a+3b-\dfrac{5}{2}=0$
이 직선이 직선 $x-3y-13=0$과 일치하므로
$-a+3b-\dfrac{5}{2}=-13\qquad\cdots$ ㉡
직선 $4x-y+3=0$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면 $4(x-a)-(y-b)+3=0$
$\therefore\ 4x-y-4a+b+3=0$
이 직선이 직선 $4x-y+c=0$과 일치하므로
$-4a+b+3=c\qquad\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{3}{2},\ b=-3,\ c=-6$
$\therefore\ a+b+c=-\dfrac{15}{2}$

11 $\triangle ABD$와 $\triangle ADC$의 높이는 같으므로 $\overline{BD}:\overline{CD}=3:4$
이때 $\overline{BC}=14$이므로
$\overline{BD}=14\times\dfrac{3}{7}=6,\ \overline{CD}=14\times\dfrac{4}{7}=8$
$\therefore\ D(-2,\ 0)$
따라서 두 점 $A(-5,\ 4)$와 $D(-2,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-0=\dfrac{0-4}{-2-(-5)}(x+2)\qquad\therefore\ 4x+3y+8=0$

12 주어진 도형을 오른쪽 그림과 같이 점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 BA를 y축으로 하는 좌표평면 위로 옮기면 A$(0,\ 33)$, F$(11,\ 0)$이므로 직선 AF의 방정식은 $y=\frac{0-33}{11-0}x+33$



$\therefore\ 3x+y-33=0 \quad \cdots ㉠$

또 E$(0,\ 11)$, D$(33,\ 33)$이므로 직선 ED의 방정식은

$y=\frac{33-11}{33-0}x+11$

$\therefore\ 2x-3y+33=0 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=6,\ y=15$

$\therefore$ G$(6,\ 15)$

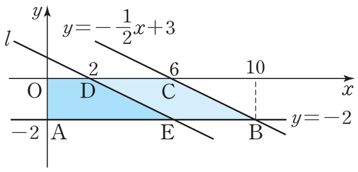
$\therefore$ (사각형 GFCD의 넓이)

$=\triangle$GFC$+\triangle$GCD

$=\frac{1}{2}\times 22\times 15+\frac{1}{2}\times 33\times 27$

$=\frac{1221}{2}\ (\mathrm{cm}^2)$

13 다음 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$의 x절편은 6이고, 직선 $y=-2$와의 교점은 B$(10,\ -2)$이다.



이때 (사각형 OABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times(6+10)\times 2=16$이므로

(사각형 DEBC의 넓이)$=\overline{\text{CD}}\times 2=8$에서 $\overline{\text{CD}}=4$

$\therefore$ D$(2,\ 0)$

즉, 직선 l의 x절편이 2이고 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+1$

따라서 직선 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 위에 있지 않은 점은 ⑤ $(-2,\ 1)$이다.

14 $y=2|x-1|+2$에서

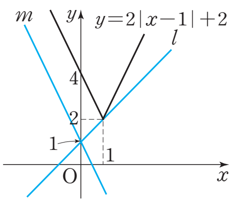
(i) $x\geq 1$일 때, $y=2(x-1)+2$

$\therefore\ y=2x$

(ii) $x<1$일 때, $y=-2(x-1)+2$

$\therefore\ y=-2x+4 \quad \cdots ㉠$

이때 직선 $y=kx+1$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다. 직선 $y=kx+1$이 $y=2|x-1|+2$의 그래프와 만나지 않으려면 직선 $y=kx+1$의 기울기가 직선 l의 기울기보다는 작고, 직선 m의 기울기보다는 크거나 같아야 한다.



l : 직선 $y=kx+1$이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때 기울기 k는

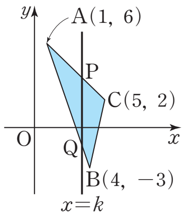
$k=\frac{2-1}{1-0}=1$

m : 직선 ㉠과 직선 $y=kx+1$이 평행할 때, 기울기 k는

$k=-2$

따라서 k의 값의 범위는 $-2\leq k<1$이다.

15 오른쪽 그림과 같이 y축에 평행한 직선의 방정식을 $x=k$라 하면 직선 $x=k$가 점 B를 지날 때, 즉 $k=4$일 때 $\overline{\text{PQ}}$의 값이 최대가 된다.



이때 직선 AC의 방정식은

$y-6=\frac{2-6}{5-1}(x-1)$

$\therefore\ y=-x+7$

이 식에 $x=4$를 대입하면 $y=3$

따라서 $\overline{\text{PQ}}$의 최댓값은 $3-(-3)=6$이다.

16 $\overline{\text{AP}}$를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 점 P는 점 Q로 옮겨지고 점 A$(0,\ -3)$은 점 A$'(0,\ -1)$로 옮겨진다.

이때 세 점 A$'$, Q, B가 한 직선 위에 있으면 $\overline{\text{AP}}+\overline{\text{PQ}}+\overline{\text{QB}}$의 값이 최소가 된다.

직선 A$'$B의 방정식은

$y+1=\frac{5-(-1)}{4-0}(x-0)$

$\therefore\ y=\frac{3}{2}x-1$

점 Q의 y좌표는 2이므로 $2=\frac{3}{2}x-1$에서

$x=2 \qquad \therefore$ Q$(2,\ 2)$

따라서 점 P의 좌표는 P$(2,\ 0)$이다.

17 점 P가 위치한 변에 따라 범위를 나누어 생각한다.

(i) 점 P가 선분 AB 위에 있을 때,

선분 AP의 길이가 $x$cm이므로

$y=\frac{1}{2}\times 8\times x$

$\therefore\ y=4x\ (0<x<4)$

(ii) 점 P가 선분 BC 위에 있을 때,

$y=\frac{1}{2}\times 8\times 4$

$\therefore\ y=16\ (4\leq x<12)$

(iii) 점 P가 선분 CD 위에 있을 때,

선분 DP의 길이는 $(16-x)$cm이므로

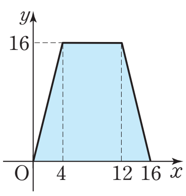
$y=\frac{1}{2}\times 8\times(16-x)$

$\therefore\ y=4(16-x)\ (12\leq x<16)$

(i), (ii), (iii)에 의해 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 이 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

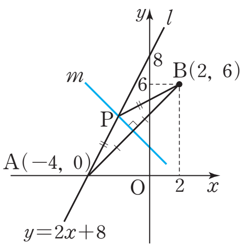
$\frac{1}{2}\times(8+16)\times 16=192$



18 직선 l은 기울기가 2이고 y절편이 8이므로 직선의 방정식은

$y=2x+8$ $\cdots$ ㉠

이때 점 $\mathrm{B}(2,\ 6)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로 점 P는 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 수직이등분선 m과 직선 $y=2x+8$의 교점이다.



직선 m의 기울기를 a라 하면 직선 AB의 기울기가 1이므로 $a\times1=-1$

$\therefore a=-1$

직선 m은 선분 AB의 중점 $\left(\dfrac{2-4}{2},\ \dfrac{6+0}{2}\right)$

즉, 점 $(-1,\ 3)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-3=-(x+1)$

$\therefore y=-x+2$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 풀면

$x=-2,\ y=4$

$\therefore \mathrm{P}(-2,\ 4)$

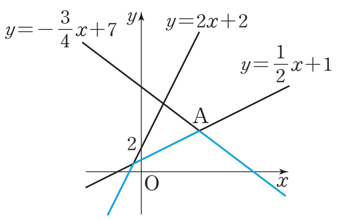
STEP 3 최고 수준 완성하기 P.129~130

01 $\dfrac{17}{5}$ **02** 28개 **03** $\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{5}{7}\right)$

04 $-3<a\le-2$ 또는 $1\le a<2$ **05** $-\dfrac{7}{4}$, 1, $\dfrac{17}{11}$

06 $(0,\ 7)$ **07** $\mathrm{D}\left(4,\ \dfrac{8}{3}\right)$ **08** $4:25$

01 세 일차함수 $y=2x+2$, $y=\dfrac{1}{2}x+1$, $y=-\dfrac{3}{4}x+7$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



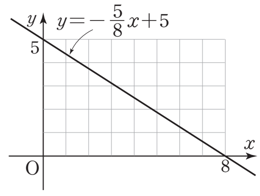
그래프의 색선이 모든 수 x의 값에 대하여 가장 작은 값을 나타내는 $f(x)$이고, $f(x)$의 최댓값은 점 A의 y좌표이다.

즉, $y=\dfrac{1}{2}x+1$과 $y=-\dfrac{3}{4}x+7$을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{24}{5},\ y=\dfrac{17}{5}$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{17}{5}$이다.

02 일차함수 $y=-\dfrac{5}{8}x+5$의 그래프는 x절편이 8, y절편이 5이다. 그래프와 만나는 정사각형의 개수는 좌표축과 평행한 직선과 그래프의 교점의 개수보다 1개 적다.



(ⅰ) x축과 평행한 직선 $y=1$, $y=2$, $\cdots$, $y=5$와 한 번씩 만나므로 이 직선들과 만나는 정사각형의 개수는 5개이다.

(ⅱ) y축과 평행한 직선 $x=1$, $x=2$, $\cdots$, $x=8$과 한 번씩 만나므로 이 직선들과 만나는 정사각형의 개수는 8개이다.

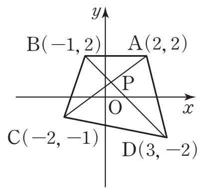
(ⅰ), (ⅱ)에서 $y=-\dfrac{5}{8}x+5$의 그래프와 만나는 정사각형의 개수는 $5+8-1=12$(개)

따라서 $y=-\dfrac{5}{8}x+5$의 그래프와 만나지 않는 정사각형의 개수는 $40-12=28$(개)이다.

03 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PC}}\ge\overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}\ge\overline{\mathrm{BD}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{PD}}\ge\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}$

즉, 점 P는 두 선분 AC, BD의 교점이다.



직선 AC의 방정식은

$y-2=\dfrac{2-(-1)}{2-(-2)}(x-2)$

$\therefore y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ㉠

직선 BD의 방정식은

$y-2=\dfrac{-2-2}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore y=-x+1$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

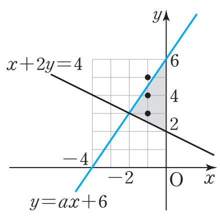
$x=\dfrac{2}{7},\ y=\dfrac{5}{7}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{5}{7}\right)$

04 $a>0$인 경우와 $a<0$인 경우로 나누어 생각한다.

(ⅰ) $a>0$인 경우

삼각형의 내부에 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 2개만 포함하므로 가능한 점은 $(-1,\ 3)$과 $(-1,\ 4)$이다.

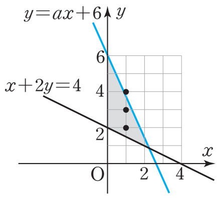


즉, 직선 $y=ax+6$의 기울기는 점 $(-1,\ 5)$를 지날 때보다는 크거나 같고, 점 $(-1,\ 4)$를 지날 때보다는 작아야 한다.

$\therefore 1\le a<2$

(ii) $a<0$인 경우

삼각형의 내부에 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 2개만 포함하므로 가능한 점은 $(1,\ 2)$와 $(1,\ 3)$이다.



즉, 직선 $y=ax+6$의 기울기는 점 $(1,\ 3)$을 지날 때보다는 크고, 점 $(1,\ 4)$를 지날 때보다는 작거나 같아야 한다.

$\therefore\ -3<a\le -2$

따라서 (i), (ii)에 의해 $-3<a\le -2$ 또는 $1\le a<2$

05 좌표평면이 6개의 부분으로 나누어지는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $(a-2)x+(1-3a)y=10$이 직선 $x+2y=-4$와 평행할 때,

$$\frac{a-2}{1}=\frac{1-3a}{2}\neq\frac{10}{-4}\qquad\therefore\ a=1$$

(ii) 직선 $(a-2)x+(1-3a)y=10$이 직선 $3x-5y=21$과 평행할 때,

$$\frac{a-2}{3}=\frac{1-3a}{-5}\neq\frac{10}{21}\qquad\therefore\ a=-\frac{7}{4}$$

(iii) 직선 $(a-2)x+(1-3a)y=10$이 두 직선 $x+2y=-4$와 $3x-5y=21$의 교점을 지날 때,

$x+2y=-4$와 $3x-5y=21$을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=-3$

즉, 교점은 $(2,\ -3)$이고 이 점은 직선 $(a-2)x+(1-3a)y=10$ 위의 점이므로

$(a-2)\times 2+(1-3a)\times(-3)=10$

$\therefore\ a=\frac{17}{11}$

따라서 (i)~(iii)에 의해 a의 값은 $-\frac{7}{4},\ 1,\ \frac{17}{11}$이다.

06 직선 l은 두 점 $A(0,\ 2)$와 $B(4,\ 0)$을 이은 선분 AB의 수직이등분선이다.

선분 AB의 중점의 좌표는 $(2,\ 1)$이고 기울기는 $\frac{0-2}{4-0}=-\frac{1}{2}$이므로 직선 l의 방정식은

$y-1=2(x-2)\qquad\therefore\ y=2x-3$

이때 점 $C(8,\ 3)$과 직선 $y=2x-3$에 대하여 대칭인 점을 $D(a,\ b)$라 하면

직선 CD의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{b-3}{a-8}=-\frac{1}{2}$에서 $a+2b=14\qquad\cdots$㉠

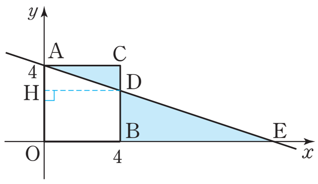
또 선분 CD의 중점 $\left(\frac{a+8}{2},\ \frac{b+3}{2}\right)$은 직선 $y=2x-3$ 위의 점이므로

$\frac{b+3}{2}=2\times\frac{a+8}{2}-3,\ 2a-b=-7\qquad\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=7$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0,\ 7)$이다.

07 다음 그림과 같이 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



(사각형 AOBD의 넓이)$=\triangle ADC+\triangle BED$이므로

$\triangle AHD+$(사각형 HOBD의 넓이)$=\triangle ADC+\triangle BED$

이때 $\triangle AHD=\triangle ADC$이므로

(사각형 HOBD의 넓이)$=\triangle BED$

즉, $\overline{OB}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{BD}$

$\therefore\ \overline{BE}=2\times\overline{OB}=2\times 4=8$

따라서 직선 AE의 x절편은 12, y절편은 4이므로 직선의 방정식은

$\frac{x}{12}+\frac{y}{4}=1\qquad\cdots$㉠

그런데 점 D는 직선 AE 위에 있고, x좌표가 4이므로 $x=4$를 ㉠에 대입하면

$\frac{4}{12}+\frac{y}{4}=1\qquad\therefore\ y=\frac{8}{3}$

$\therefore\ D\left(4,\ \frac{8}{3}\right)$

08 점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 직선 SQ의 방정식은 $x=a$이고 직선 PR의 방정식은 $y=b$이다.

두 점 P, S는 각각 직선 $y=\frac{5}{4}x$와 직선 $y=b,\ x=a$의 교점이고 두 점 Q, R는 각각 직선 $y=\frac{1}{5}x$와 직선 $x=a,\ y=b$의 교점이다.

$\therefore\ P\left(\frac{4}{5}b,\ b\right),\ Q\left(a,\ \frac{1}{5}a\right),\ R(5b,\ b),\ S\left(a,\ \frac{5}{4}a\right)$

이때 두 삼각형 APQ, ARS의 넓이는

$$\triangle APQ=\frac{1}{2}\left(a-\frac{4}{5}b\right)\left(b-\frac{1}{5}a\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}(5a-4b)\times\frac{1}{5}(5b-a)$$
$$=\frac{1}{50}(5a-4b)(5b-a)$$

$$\triangle ARS=\frac{1}{2}(5b-a)\left(\frac{5}{4}a-b\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times(5b-a)\times\frac{1}{4}(5a-4b)$$
$$=\frac{1}{8}(5a-4b)(5b-a)$$

$\therefore\ \triangle APQ:\triangle ARS=\frac{1}{50}:\frac{1}{8}$

$=4:25$

퍼펙트 단원 마무리 P.131~133

01 ① **02** 0 **03** -1

04 x절편 : $\frac{16}{9}$, y절편 : -16 **05** ㄱ, ㄴ, ㄹ

06 $\frac{4}{3}$ **07** $\frac{1}{2} \le a \le \frac{5}{2}$ **08** $y=x+1$

09 풀이 참조 **10** ② **11** 4

12 $\mathrm{P}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ **13** $-1<a\le 2$ **14** 1

15 $y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ **16** 4 **17** 12초 **18** 250 m

01 $y=-2x+b$에 $x=b$, $y=4$를 대입하면

$4=-2b+b \qquad \therefore b=-4$

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ a)$라 하면

$y=-2x-4$의 그래프가 점 $\mathrm{P}(a,\ a)$를 지나므로

$a=-2a-4 \qquad \therefore a=-\frac{4}{3}$

$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$

02 $f(x)=3x+1$에 대하여

$f(x)*f(y)=f(xy-x-y)$이므로

$(3x+1)*(3y+1)=3(xy-x-y)+1$

$=3xy-3x-3y+1$

위의 식에서 $3x+1=X$, $3y+1=Y$라 하면

$x=\frac{X-1}{3}$, $y=\frac{Y-1}{3}$이므로

$X*Y$

$=3\times\frac{X-1}{3}\times\frac{Y-1}{3}-3\times\frac{X-1}{3}-3\times\frac{Y-1}{3}+1$

$\therefore 1*2=3\times\frac{1-1}{3}\times\frac{2-1}{3}-3\times\frac{1-1}{3}-3\times\frac{2-1}{3}+1$

$=-1+1=0$

[다른 풀이]

$3x+1=1$, $3y+1=2$라 하면 $x=0$, $y=\frac{1}{3}$

$\therefore 1*2=f(0)*f\left(\frac{1}{3}\right)$

$=f\left(0\times\frac{1}{3}-0-\frac{1}{3}\right)$

$=f\left(-\frac{1}{3}\right)=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1=0$

03 세 점 O, A, B를 주어진 규칙으로 옮기면

$\mathrm{O}(0,\ 0) \longrightarrow \mathrm{O}'(0-0,\ a\times0+0)$

$\mathrm{A}(1,\ 3) \longrightarrow \mathrm{A}'(1-3,\ a\times1+3)$

$\mathrm{B}(2,\ 0) \longrightarrow \mathrm{B}'(2-0,\ a\times2+0)$

$\therefore \mathrm{O}'(0,\ 0),\ \mathrm{A}'(-2,\ a+3),\ \mathrm{B}'(2,\ 2a)$

세 점이 한 직선 위에 있으므로 기울기가 일정하다.

$\frac{a+3-0}{-2-0}=\frac{2a-0}{2-0}$, $a+3=-2a$

$\therefore a=-1$

04 $2\le f(2)\le 4$이므로 $2\le 2a+b\le 4$ $\cdots$㉠

$7\le f(3)\le 11$이므로 $7\le 3a+b\le 11$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $7-4\le(3a+b)-(2a+b)\le 11-2$이므로

$3\le a\le 9$

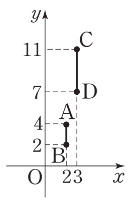
즉, 기울기의 최댓값은 9이므로 $2a+b=2$에 $a=9$를 대입하면 $b=-16$

$\therefore f(x)=9x-16$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 기울기가 최대일 때, x절편은 $\frac{16}{9}$이고 y절편은 -16이다.

[다른 풀이]

오른쪽 그림에서 점 $(2,\ f(2))$는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 위의 점이고 점 $(3,\ f(3))$은 $\overline{\mathrm{CD}}$ 위의 점이므로 이 두 점을 지나는 직선의 기울기가 최대가 되려면 $f(2)=2$, $f(3)=11$이어야 한다.



$f(x)=ax+b$에서

$2a+b=2$, $3a+b=11$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-16$

$\therefore f(x)=9x-16$

05 ㄱ. $a>0$, $c>0$이고, $y=ax+b$의 그래프가 $y=cx+d$의 그래프보다 y축에 더 가까우므로 $a>c$

ㄴ. 함수 $y=ax+b$와 함수 $y=cx+d$는 $x=-1$일 때 함숫값이 모두 음수이므로 $-a+b<0$, $-c+d<0$

즉, $a-b>0$, $c-d>0$

$\therefore a-b+c-d>0$

ㄷ. 함수 $y=ax+b$는 $x=1$일 때 함숫값이 양수이고, 함수 $y=cx+d$는 $x=1$일 때 함숫값이 음수이므로

$a+b>0$, $c+d<0$

$\therefore (a+b)(c+d)<0$

ㄹ. 두 일차함수 $y=ax+b$, $y=cx+d$의 그래프의 x절편은 각각 $-\frac{b}{a}$, $-\frac{d}{c}$이고 $-\frac{b}{a}<-\frac{d}{c}$이므로

$\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

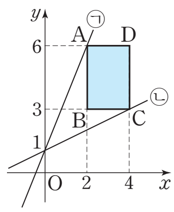
06 직선 l의 기울기는 $-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$이므로 $\frac{\overline{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\frac{3}{2}$

직선 m의 기울기는 $-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$이므로 $\frac{\overline{\mathrm{PD}}}{\overline{\mathrm{PB}}}=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PC}}\times\overline{\mathrm{PD}}}=\frac{\overline{\mathrm{PA}}}{\overline{\mathrm{PC}}}\times\frac{\overline{\mathrm{PB}}}{\overline{\mathrm{PD}}}=\frac{2}{3}\times2=\frac{4}{3}$

07 오른쪽 그림과 같이 $y=ax+1$의 그래프는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

이 직선이 직사각형 ABCD와 만나려면 $y=ax+1$의 그래프의 기울기 a는 직선 ㉠의 기울기보다 작거나 같고, 직선 ㉡의 기울기보다 크거나 같아야 한다.



(i) $y=ax+1$의 그래프가 점 A$(2,\ 6)$을 지날 때,

$6=2a+1 \qquad \therefore\ a=\frac{5}{2}$

(ii) $y=ax+1$의 그래프가 점 C$(4,\ 3)$을 지날 때,

$3=4a+1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

따라서 (i), (ii)에 의해 a의 값의 범위는 $\frac{1}{2}\le a\le\frac{5}{2}$

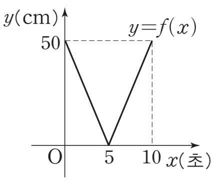
08 두 정사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 정사각형의 각각의 대각선의 교점, 즉 점 $(-2,\ -1)$과 점 $(2,\ 3)$을 지나야 한다.
이 두 점을 지나는 직선을 그래프로 하는 함수의 식은

$y-3=\frac{-1-3}{-2-2}(x-2) \qquad \therefore\ y=x+1$

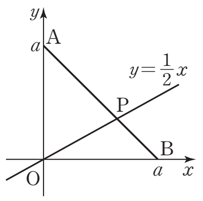
09 실험용 쥐는 1초에 10 cm씩 움직이므로 A 지점에서 B 지점까지 가는 데 $\frac{50}{10}=5$(초)가 걸린다.
즉, $0\le x\le 5$일 때 $f(x)=50-10x$
또 5초 후에는 B 지점에서 A 지점으로 이동하므로
$5<x\le 10$일 때 $f(x)=10(x-5)=10x-50$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases}50-10x & (0\le x\le 5)\\ 10x-50 & (5<x\le 10)\end{cases}$

따라서 $0\le x\le 10$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



10 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 A$(0,\ a)$, B$(a,\ 0)$이라 하면 △AOB에서



$\frac{1}{2}\times a\times a=18,\ a^2=36$

$a>0$이므로 $a=6$
즉, 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}=1 \qquad \therefore\ y=-x+6$

이때 점 P는 직선 AB와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점이므로

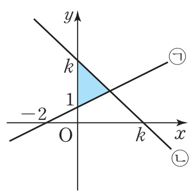
$y=-x+6,\ y=\frac{1}{2}x$를 연립하여 풀면 $x=4,\ y=2$

따라서 점 P의 좌표는 P$(4,\ 2)$이다.

11 연립방정식 $\begin{cases}x-2y=-2 & \cdots ㉠\\ x+y=k & \cdots ㉡\end{cases}$에서

㉠+㉡×2를 하면 $3x=2k-2 \qquad \therefore\ x=\frac{2(k-1)}{3}$

직선 ㉠의 y절편은 1, 직선 ㉡의 y절편은 k이고 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이는 3이므로

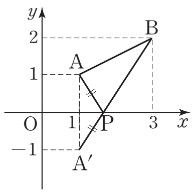


$\frac{1}{2}\times(k-1)\times\frac{2(k-1)}{3}=3$

$(k-1)\times(k-1)=3\times3$

$k>1$이므로 $k-1=3 \qquad \therefore\ k=4$

12 △ABP에서 $\overline{AB}$의 길이는 일정하므로 둘레의 길이가 최소가 되려면 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소가 되어야 한다.
오른쪽 그림과 같이 점 A와 x축에 대하여 대칭인 점을 A′이라 하면 A′$(1,\ -1)$
이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $\overline{A'B}$이다.
즉, 점 P는 직선 A′B가 x축과 만나는 점이다.



점 A′$(1,\ -1)$과 점 B$(3,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y+1=\frac{2-(-1)}{3-1}(x-1)$

$\therefore\ y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$

따라서 이 직선의 x절편은 $\frac{5}{3}$이므로 P$\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$이다.

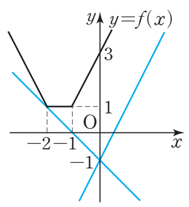
13 $f(x)=|x+1|+|x+2|$에서

(i) $x\ge-1$일 때,
$f(x)=(x+1)+(x+2)=2x+3$

(ii) $-2\le x<-1$일 때,
$f(x)=-(x+1)+(x+2)=1$

(iii) $x<-2$일 때,
$f(x)=-(x+1)-(x+2)=-2x-3$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
이때 직선 $y=ax-1$의 y절편은 -1이고 기울기는 a이므로 이 직선이 $y=f(x)$의 그래프와 만나지 않으려면 기울기 a가 점 $(-2,\ 1)$을 지날 때의 기울기보다는 크고, $y=2x+3$과 평행한 직선의 기울기보다는 작거나 같아야 한다.

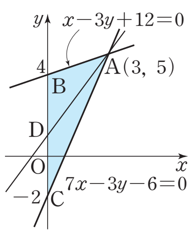


$\therefore\ -1<a\le 2$

14 연립방정식 $\begin{cases}x-3y=-12\\ 7x-3y=6\end{cases}$을 풀면 $x=3,\ y=5$

$\therefore$ A$(3,\ 5)$

두 직선이 y축과 만나는 점을 각각 B, C라 하고 직선 $ax+by+3=0$이 y축과 만나는 점을 D라 하면 직선 AD가 색칠한 부분의 넓이를 이등분하므로



$\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times6=3$

$\therefore$ D$(0,\ 1)$

두 점 A$(3,\ 5)$와 D$(0,\ 1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{5-1}{3-0}(x-0)$

$\therefore\ y=\frac{4}{3}x+1$

따라서 $4x-3y+3=0$에서 $a=4,\ b=-3$이므로
$a+b=1$

15 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 AC, BD의 중점은 일치한다.

즉, $\frac{0+b}{2}=\frac{2+2a}{2}$, $\frac{3+a}{2}=\frac{0+b}{2}$에서

$b=2+2a$, $3+a=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=4$이므로

두 대각선의 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

평행사변형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은 두 대각선의 교점을 지나므로 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-0=\frac{2-0}{2-(-1)}(x+1)$$

$\therefore\ y=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$

16 (i) $x\geq y$일 때,

$|x-y|=x-y$이므로

$\frac{x+y+x-y}{2}=1$에서 $x=1$

$\frac{x+y-x+y}{2}=-1$에서 $y=-1$

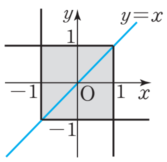
(ii) $x<y$일 때,

$|x-y|=-(x-y)$이므로

$\frac{x+y-x+y}{2}=1$에서 $y=1$

$\frac{x+y+x-y}{2}=-1$에서 $x=-1$

(i), (ii)에 의해 각각의 그래프를 좌표 평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\times2=4$

17 두 점 P, Q가 움직인 거리를 각각 y_1, y_2라 하고 점 Q가 움직인 시간을 t초$(0\leq t\leq 20)$라 하면

$$\begin{cases} y_1=\overline{AP}=3(t+8) & \cdots ㉠ \\ y_2=\overline{CQ}=5t & \cdots ㉡ \end{cases}$$

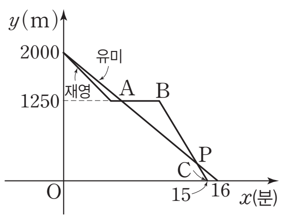
이때 사각형 ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{PC}/\!/\overline{AQ}$이면 $\overline{AP}=\overline{CQ}$이다.

즉, $y_1=y_2$이므로 ㉠, ㉡에서

$3t+24=5t$ $\quad\therefore\ t=12$

따라서 $\overline{PC}/\!/\overline{AQ}$가 되는 것은 점 Q가 점 C를 출발한 지 12초 후이다.

18 유미에 대한 직선의 방정식은 $\frac{x}{16}+\frac{y}{2000}=1$



$\therefore\ 125x+y=2000$

$\cdots ㉠$

㉠에 $y=1250$을 대입하면

$125x+1250=2000$에서

$x=6$

$\therefore\ \mathrm{A}(6,\ 1250)$

재영이는 유미가 지나쳐간 후 4분 동안 더 휴식을 취했으므로 $\mathrm{B}(6+4,\ 1250)$ $\quad\therefore\ \mathrm{B}(10,\ 1250)$

두 점 $\mathrm{B}(10,\ 1250)$, $\mathrm{C}(15,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{0-1250}{15-10}(x-15)$$

$\therefore\ y=-250x+3750$ $\quad\cdots ㉡$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $x=14$, $y=250$

$\therefore\ \mathrm{P}(14,\ 250)$

따라서 재영이는 휴식을 마친 후 결승점 250 m 앞에서 유미를 지나쳤다.

특목 경시 대비 논술·구술 도전하기 P.134~135

1 (1) $y=0.2467x+4.159$에 $x=40$을 대입하면

$y=0.2467\times40+4.159$

$=9.868+4.159=14.027$

따라서 14층의 소음이 가장 심할 것으로 예상된다.

(2) |예시| 일반적으로 아파트에서 저층이 도로와 가깝기 때문에 고층보다 소음이 더 심할 것으로 생각한다.

하지만 주어진 일차함수의 식에 $x=1$을 대입하면 $y=0.2467+4.159=4.4057$이므로 도로와 거의 붙어 있는 아파트도 1층이 아니라 4층 또는 5층의 소음이 가장 심하다. 또 주어진 일차함수의 그래프는 기울기가 양수이므로 x의 값이 커지면 y의 값도 커진다.

따라서 도로변의 아파트에서 가장 소음이 심한 층은 도로와 아파트 사이의 거리에 의하여 결정되고, 도로와의 거리가 멀어지면 장애물의 영향을 비교적 덜 받는 고층일수록 소음이 심하다는 것을 추측할 수 있다.

2 |예시| 개의 나이를 x세, 사람의 나이를 y세로 놓고 일차함수 $y=ax+b$ (a, b는 상수)로 나타내자.

주어진 글에서 개의 나이 1세와 사람의 나이 18세가 같고, 개의 나이 10세는 사람의 나이 63세와 같으므로

$y=ax+b$에서

$$\begin{cases} a+b=18 & \cdots ㉠ \\ 10a+b=63 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡−㉠을 하면 $9a=45$ $\quad\therefore\ a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=13$

$\therefore\ y=5x+13$

즉, 기사의 빈칸에 들어갈 알맞은 식은

(사람의 나이)$=5\times$(개의 나이)$+13$

이다.

이때 $y=5x+13$에 $y=73$을 대입하면

$73=5x+13$ $\quad\therefore\ x=12$

따라서 사람의 평균 수명이 73세라고 할 때, 개의 평균 수명은 12세 정도라고 할 수 있다.